Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Simulações Numéricas de Métodos Explícitos para a Equação de Korteweg-de Vries Linearizada

Igor P. dos Santos Pereira[1]
Instituto de Química, UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Cristiane Oliveira de Faria[2]
Instituto de Matemática e Estatística, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

A equação de Korteweg-de Vries (KdV) é uma EDP que equilibra o efeito dispersivo de sua derivada terceira com a formação de choque gerado por sua não-linearidade para dar origem a soluções estáveis sem descontinuidades, conhecidas como *sólitons* ou "ondas solitárias" [1]. A KdV, que tipicamente modela sistemas ondulatórios pode ser escrita da seguinte forma: $u_t + uu_x + u_{xxx} = f$. Para estudar a influência do caráter dispersivo da derivada terceira nas soluções, despreza-se o termo não-linear uu_x, obtendo-se a KdV linearizada. Segue abaixo o problema modelo proposto neste trabalho, baseado em [3], com as suas respectivas condições de contorno e iniciais:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = f \ , & \forall\,(x,t) \in \Omega = (0,L)\times(0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \ , & \forall\, t \in [0,T], \\ u_x(L,t) = 0 \ , & \forall\, t \in [0,T], \\ u(x,0) = g(x) \ , & \forall\, x \in [0,L]. \end{cases} \tag{1}$$

Fisicamente $u(x,t)$ é a elevação da onda no ponto x, no instante de tempo t, $f \in C^0(\Omega)$ é o termo fonte, $g \in C^3(0,L)$ é a condição inicial do problema, T o tempo final e L o comprimento do canal pelo qual a onda se propaga. Para obtenção da solução aproximada de (1), neste trabalho propomos três esquemas de diferenças finitas, que foram inspirados em métodos explícitos clássicos para equação de advecção [2]: Esquema 1 (baseado em Euler), Esquema 2 (baseado em Lax-Friedrichs) e Esquema 3 (baseado em Leapfrog),

Esquema 1: $u_i^{n+1} = u_i^n - \dfrac{\Delta t}{2\Delta x^3}\left(u_{i+2}^n - 2\,u_{i+1}^n + 2\,u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right) + f_i^n \Delta t$

Esquema 2: $u_i^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - \dfrac{\Delta t}{2\Delta x^3}\left(u_{i+2}^n - 2\,u_{i+1}^n + 2\,u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right) + f_i^n \Delta t$

Esquema 3: $u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \dfrac{\Delta t}{\Delta x^3}\left(u_{i+2}^n - 2\,u_{i+1}^n + 2\,u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right) + f_i^n \Delta t$

---

[1]igorpsp96@gmail.com
[2]cofaria@ime.uerj.br

 © 2018 SBMAC

Em todos os casos foi adotado uma aproximação central para a derivada de terceira ordem. Um estudo comparativo dos resultados obtidos pelos três esquemas serão apresentados.

A implementação computacional do modelo depende que as condições de contorno sofram um devido tratamento. O estêncil de cada um dos esquemas propostos possui cinco pontos, invalidando a utilização desses em regiões próximas ao bordo do domínio. Sendo assim, é necessário obter outro tratamento para encontrar a solução aproximada. Em $x = L$, a condição de contorno de Neumann é suficiente para resolver esta questão. Como,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_I^{n+1} \approx \frac{-3\, u_I^{n+1} + 4\, u_{I-1}^{n+1} - u_{I-2}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \; ,$$

aplicando a condição de contorno de Dirichlet $u_I^{n+1} = u(L,t) = 0$, obtém-se

$$u_{I-1}^{n+1} = \frac{1}{4}\, u_{I-2}^{n+1} \; .$$

Já que em $x = 0$, só temos uma condição de Dirichlet, para obtermos a solução aproximada no ponto $x = \Delta x$, precisamos propor o seguinte esquema auxiliar:

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x^3}\Big(- u_4^n + 6\, u_3^n - 12\, u_2^n + 10\, u_1^n - 3\, u_0^n\Big) + f_1^n \Delta t.$$

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao LNCC pelo auxílio financeiro (PIBIC/PIBIT).

Referências

[1] F. A. C. C. Chalub, J. P. Zubelli. Sólitons: Na Crista da Onda por mais de 100 anos., *Matemática Universitária*, 30:41-65, 2001.

[2] R. J. LeVeque. *Finite Difference Methods of Ordinary and Partial Differential Equations – Steady-State and Time-Dependent Problems.* SIAM, Philadelphia, 2007.

[3] F. S. Teixeira, Análise e Simulação Numérica da Equação de Korteweg-de Vries, Dissertação de Mestrado em Informática, UFRJ, (2011).

© 2018 SBMAC