Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Modelo integrado de empacotamento de peças irregulares em faixa e caminho mínimo de corte

Larissa T. Oliveira[1] Everton F. Silva[2] Franklina M. B. Toledo[3]
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP
José Fernando Oliveira[4]
INESC TEC, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal

Resumo. O problema de empacotamento de peças irregulares em faixas visa definir um plano de corte de peças irregulares a serem cortadas a partir de placas maiores minimizando a perda de material utilizado. Em algumas indústrias surge, após a determinação do plano de corte, um segundo problema: a determinação do caminho mínimo de corte. Embora a solução do primeiro influencie fortemente a resolução do segundo, não é de nosso conhecimento que exista um modelo matemático que integre estes problemas. Neste artigo, propomos o primeiro modelo integrado de empacotamento de peças irregulares em faixa e de caminho mínimo de corte.

Palavras-chave. Problema de empacotamento, caminho de corte, integração

1 Introdução

O problema de empacotamento de peças irregulares consiste em agrupar peças de formato irregular em uma placa de altura fixa e comprimento ilimitado minimizando o comprimento utilizado da placa. Uma solução para o problema é chamada de plano de corte. [21] classificaram o problema como bidimensional e irregular e sua principal característica, que o distingue dos demais problemas de empacotamento, é a geometria irregular de suas peças que, por sua vez, podem ser convexas ou não-convexas. Uma das principais dificuldades do problema é determinar automaticamente quando duas peças se sobrepõem e garantir que elas estejam totalmente contidas na placa. As estratégias mais comuns utilizadas para tratar a parte geométrica são: *raster points*, trigonometria direta, *no-fit polygon* (NFP) e função *phi*. Neste trabalho, utilizamos o NFP para tratar a sobreposição das peças. Essencialmente, o NFP é um polígono obtido a partir de dois outros polígonos e é utilizado para determinar se eles se sobrepõem, se tocam ou se estão separados. Nesta estratégia, todas as peças são representadas por polígonos e possuem um ponto de referência. Uma das vantagens em se utilizar o NFP é a redução do processamento

[1]ltdo@icmc.usp.br
[2]everton.fernandes@usp.br
[3]fran@icmc.usp.br
[4]jfo@fe.up.pt

computacional, uma vez que para analisar a relação entre duas peças basta verificar se o ponto de referência está dentro, fora ou na fronteira do NFP das peças.

De acordo com [9], o problema de empacotamento de peças irregulares é NP-completo. Isso justifica o atual cenário da área, onde há um grande número de artigos que utilizam heurísticas e/ou meta-heurísticas para tratar o problema [3], enquanto poucos métodos exatos são propostos [1, 4, 5, 8, 12, 18, 20].

Uma vez definido um plano de corte, surge, em algumas indústrias, a questão adicional de encontrar o melhor trajeto para cortar as peças, ou seja, o problema de determinar um caminho de corte. Esse problema consiste em definir a menor trajetória que as ferramentas de corte devem seguir para cortar o plano de corte previamente definido. A maioria dos artigos da área resolveu o problema de forma heurística [10, 13–15, 17]. Apenas dois artigos [6, 7] apresentaram modelos matemáticos, contudo devido à sua complexidade e a seu alto tempo computacional, o problema continua sendo resolvido de forma heurística.

Segundo [11, 14], as decisões tomadas na escolha do plano de corte influenciam fortemente na resolução do problema de caminho mínimo de corte. Até o momento, apenas [2, 16, 19] propuseram metodologias para resolver os dois problemas em conjunto. Dentre os três trabalhos, apenas [2] resolveram os problemas de maneira integrada, porém limitando-se a peças retangulares.

Neste artigo, propomos o primeiro modelo biobjetivo integrado de empacotamento de peças irregulares em faixa e de caminho mínimo de corte. Os resultados mostram que é vantajoso integrar os problemas de empacotamento e de caminho mínimo de corte. Contudo, como ambos são problemas de difícil resolução, o problema integrado é no mínimo tão difícil quanto os problemas isolados. Logo, apenas instâncias de pequeno porte são resolvidas de forma exata. O restante do artigo está estruturado como segue. O modelo desenvolvido é apresentado na Seção 2 e os testes computacionais são reportados na Seção 3. As considerações finais e as perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas na Seção 4.

2 O modelo integrado

Desenvolvemos o primeiro modelo integrado de empacotamento de peças irregulares em faixas e caminho mínimo de corte. Este é um modelo biobjetivo que minimiza o comprimento utilizado da placa e o caminho de corte entre as peças, cortando uma peça de cada vez a partir do seu ponto fixo de início (vértice de referência). Dois modelos foram utilizados como base: o modelo dos pontos [20], que é responsável pela alocação das peças; e o modelo do caixeiro viajante (TSP), responsável pela determinação do caminho mínimo de corte considerando o corte por peça.

No modelo de [20], a placa é representada por uma malha de pontos regular e unitária e as peças são representadas por seus vértices de referência. Devido a discretização, utiliza-se um limitante superior para o comprimento da placa. Como o corte considerado neste trabalho é o corte por peças, definimos que as peças são cortadas a partir de seus pontos de referência, assim o caminho de corte é dado pelo menor percurso entre estes pontos.

O modelo proposto, seus parâmetros e variáveis são descritos a seguir.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0302

Tabela 1: Conjuntos, índices e parâmetros.

$t, u \in \mathcal{T} = \{1, ..., T\}$	conjunto de tipos de peças
$d \in \mathcal{D} = \{0, ..., D-1\}$	conjunto de pontos da malha, em que D é o total de pontos
$c_d \in \mathcal{C} = \{0, ..., C-1\}$	conjunto das colunas da malha, sendo C o total de colunas
q_t	número de peças do tipo t a serem cortadas
x_t^M	coordenada x do vértice mais distante da peça do tipo t
g_x	distância horizontal entre os pontos da placa
$\mathcal{IFP}_t$	conjunto de pontos da placa em que o ponto de referência da peça t pode ser alocado mantendo a peça dentro da placa
$\mathcal{NFP}_{t,u}^d$	conjunto dos pontos no interior do $NFP_{t,u}$ se uma peça do tipo t for posicionada no ponto d
T_p	total de peças ($T_p = \sum_{t \in \mathcal{T}} q_t$)
d_{ij}	distância euclidiana entre os pontos i e j da placa

Tabela 2: Variáveis.

$z \geq 0$	representa o comprimento utilizado da placa
$\delta_t^d \in \{0,1\}, \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \forall t \in \mathcal{T}$	igual a 1 se o ponto de referência da peça t é alocado ao ponto d da placa e 0 caso contrário
$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i, j \in \mathcal{D}$	igual a 1 se o percurso de corte sai do ponto i com destino ao ponto j e 0 caso contrário
$u_i \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \mathcal{D}$	indica a ordem do ponto i da placa no percurso
$w_i \in \{0,1\}, \forall i \in \mathcal{D}$	igual a 1 se uma ou mais peças têm seus pontos de referência no ponto i da placa e 0 caso contrário

$$\min \quad z \tag{1}$$

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{D}} \sum_{j \in \mathcal{D}} d_{ij} x_{ij} \tag{2}$$

$$\text{s.a:} \quad (c_d g_x + x_t^M)\delta_t^d \leq z, \qquad \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \forall t \in \mathcal{T}, \tag{3}$$

$$\sum_{d \in \mathcal{IFP}_t} \delta_t^d = q_t, \qquad \forall t \in \mathcal{T}, \tag{4}$$

$$\delta_u^e + \delta_t^d \leq 1, \qquad \forall e \in \mathcal{NFP}_{t,u}^d, \forall t, u \in \mathcal{T}, u \geq t, \forall d \in \mathcal{IFP}_t, \tag{5}$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \delta_t^i \leq T_p w_i, \qquad i \in \mathcal{D}, \tag{6}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{D}} w_i \leq T_p, \tag{7}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{D}, i \neq j} x_{ij} = w_j, \qquad j \in \mathcal{D} \backslash \{0\}, \tag{8}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{D}, j \neq i} x_{ij} = w_i, \qquad i \in \mathcal{D} \backslash \{0\}, \tag{9}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{D} \backslash \{0\}} x_{i0} = 1, \tag{10}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{D} \backslash \{0\}} x_{0j} = 1, \tag{11}$$

$$(i,j) : x_{ij} = 1, i, j \in \mathcal{D} \qquad \text{não possuir subciclos ilegais.} \tag{12}$$

O modelo biobjetivo (1)-(12) visa minimizar o comprimento total da placa utilizado no empacotamento das peças (objetivo (1)) e também minimizar o percurso feito pela ferramenta de corte entre as peças (objetivo (2)). As restrições (3)-(5) foram definidas como em [20]. As restrições (3) minimizam o comprimento da placa utilizado na alocação das peças, as restrições (4) garantem que todas as peças demandadas sejam alocadas na placa e as restrições (5) asseguram a não sobreposição entre as peças.

As restrições (6) e (7) são responsáveis por integrar os problemas de empacotamento e de determinação de caminho de corte. As restrições (6) exigem que quando uma ou mais peças tenham seus pontos de referência localizados no ponto i da placa, então a variável w_i assuma o valor 1, indicando que o caminho de corte deve incluir esse ponto. Em outras palavras, um ponto da placa participará obrigatoriamente do percurso de corte se houver pelo menos um ponto de referência de alguma peça posicionado sobre ele. A restrição (7) limita a quantidade máxima de pontos da placa associados aos pontos de referência.

As restrições (8)-(12) definem o problema de determinação do caminho de corte como um TSP entre os pontos de referência das peças. As restrições (8) exigem que uma peça seja cortada logo após uma única outra peça ter sido cortada. Contudo, um ponto j da placa só participa do percurso se houver pelo menos um ponto de referência de alguma peça posicionado nele ($w_j = 1$), caso contrário o ponto j não pertence ao percurso. O mesmo raciocínio é aplicado às restrições (9) que exigem que após o corte de peça apenas uma outra peça será cortada. As restrições (10) e (11) estão relacionadas a origem da ferramenta, localizada no ponto 0 e a restrição (12) impede a existência de subciclos entre os pontos do percurso, ou seja, impõe que exista uma única rota que corte todas as peças. Neste artigo, utilizamos a estratégia de proibir os subciclos a medida que eles aparecem.

3 Experimentos computacionais

Dado que o modelo (1)-(12) é biobjetivo, utilizamos a estratégia clássica ε-restrito, minimizando o caminho de corte (2) e adicionando o empacotamento (1) às restrições do modelo (i.e. $z \leq \varepsilon$). Pela discretização da placa, temos que o parâmetro ε assume apenas valores inteiros em um intervalo inicializado pelo menor comprimento de placa possível e encerrado pelo comprimento que possui o menor caminho de corte.

Para os experimentos foi utilizado o software de otimização ILOG CPLEX 12.6 em um computador com processador Intel Core i7-7700, 3.6 GHz, 16GB de RAM, sistema operacional Linux e um conjunto de 4 instâncias da literatura do problema de empacotamento[5]. Detalhes sobre as instâncias, como as dimensões das placas, a quantidade de tipos de peças e o número total de peças são apresentados na Tabela 3. Na tabela também são apresentados os resultados obtidos utilizando a estratégia hierárquica e o modelo integrado. Para a estratégia hierárquica, primeiro é resolvido o empacotamento das peças (Nest) e em seguida é determinado o caminho mínimo de corte (CC) para o *layout* obtido.

Analisando a Tabela 3, observamos uma redução no caminho de corte para os *layouts* de comprimento mínimo. Por exemplo, a instância Three teve o seu caminho de corte reduzido de $17,07$ u.m. (estratégia hierárquica) para $15,08$ u.m. (estratégia integrada).

[5]Disponíveis em http://paginas.fe.up.pt/∼esicup.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Tabela 3: Características do conjunto de instâncias e resultados.

Inst.	**Placa**		**Peças**		**Hierárquico**		**Integrado**		
	Alt.	**Comp.**	**Tipo**	**Dem.**	**Nest**[a]	**CC**	**Nest**	**CC**	**T(s)**
Three	7	9	3	3	6	17,07	6	15,08	0,08
							7	9,77	0,64
Three2	7	15	3	6	10	25,82	10	21,48	2,54
							11	18,81	41,19
Three3	7	20	3	9	14	35,12	14	31,39	12,38
							15	29,50	332,82
							16	29,00	5047,72
Shapes4	13	35	4	4	24	57,32	24	31,48	32,61
Shapes4*	20	35	4	4	-	-	14	48,05	20,34
							15	47,08	105,80
							16	41,15	220,00
							17	39,15	768,39
							18	37,83	2213,55
							19	36,50	4863,57
							20	36,14	5977,29
							21	34,36	9677,13
							22	32,99	5963,72
							23	31,85	21363,04
							24	31,48	46369,12

[a] *Layouts* apresentados em [18].

Vale ressaltar que o comprimento do empacotamento é o mesmo, porém os *layouts* são diferentes. Esse resultado mostra que a integração é vantajosa e que considerar o caminho de corte durante o empacotamento pode eliminar a multiplicidade de soluções.

Por ser um modelo biobjetivo, não há apenas uma única solução ótima, mas um conjunto de soluções eficientes, que são todas as soluções ótimas dos subproblemas com os respectivos valores de ε nas restrições do empacotamento, e juntas elas formam a chamada curva de pareto-ótima. As soluções eficientes são apresentadas na Tabela 3. Um *layout* com caminho de corte menor pode melhorar a produtividade de uma fábrica, pois o tempo economizado durante o corte pode ser utilizado para o corte de mais *layouts* ao longo do dia. Por outro lado, isso acarreta em uma maior perda de material. De posse dessas soluções, o tomador de decisão decidirá qual é a solução mais vantajosa.

Existe a possibilidade de alguma instância não ser biobjetiva, como é o caso da Shapes4, que apresenta uma única solução que minimiza tanto o empacotamento quanto o caminho de corte. Isso acontece devido as características consideradas para a instância, neste caso, a altura da placa. Considerando novas dimensões da placa (Shapes4*), o problema passa a ter uma maior flexibilidade no empacotamento e volta a se tornar biobjetivo.

Como ambos problemas são de difícil resolução, o problema integrado é tão difícil quanto os problemas isolados. Isso pode ser observado pelo aumento no tempo necessário para resolver o modelo a medida que as instâncias aumentam de tamanho.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0302

4 Conclusões

Neste artigo foi apresentado o primeiro modelo matemático que integra os problemas de empacotamento de peças irregulares em faixas e de determinação do caminho mínimo de corte. Os resultados mostraram que a integração é vantajosa, contudo apenas instâncias pequenas puderam ser resolvidas. Como trabalho futuro, pretendemos propor uma matheurística para resolver o problema.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP (2013/25743-6, 2016/09476-6 e 2013/27162-0), ao CNPq (306918/2014-5) e ao Lab. de Otimização do ICMC/USP (www.otm.icmc.usp.br).

Referências

[1] R. Álvarez-Valdés, A. Martinez, and J.M. Tamarit. A branch & bound algorithm for cutting and packing irregularly shaped pieces. *International Journal of Production Economics*, 145(2):463 – 477, 2013.

[2] K. V. Anand and A. R. Babu. Heuristic and genetic approach for nesting of two-dimensional rectangular shaped parts with common cutting edge concept for laser cutting and profile blanking processes. *Computers & Industrial Engineering*, 80:111 – 124, 2015.

[3] J. A. Bennell and J. F. Oliveira. A tutorial in irregular shape packing problems. *Journal of the Operational Research Society*, 60(1):93 – 105, 2009.

[4] M. A. Carravilla, C. Ribeiro, and J. F. Oliveira. Solving nesting problems with non-convex polygons by constraint logic programming. *International Transactions in Operational Research*, 10(6):651 – 663, 2003.

[5] L. H. Cherri, L. R. Mundim, M. Andretta, F. M.B. Toledo, J. F. Oliveira, and M. A. Carravilla. Robust mixed-integer linear programming models for the irregular strip packing problem. *European Journal of Operational Research*, 253(3):570 – 583, 2016.

[6] R. Dewil, P. Vansteenwegen, and D. Cattrysse. Cutting path optimization using tabu search. *Key Engineering Materials*, 473:739 – 748, 2011.

[7] R. Dewil, P. Vansteenwegen, and D. Cattrysse. Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters. *International Journal of Production Research*, 52(20):5965 – 5984, 2014.

[8] M. Fischetti and I. Luzzi. Mixed-integer programming models for nesting problems. *Journal of Heuristics*, 15(3):201 – 226, 2009.

[9] R. J. Fowler, M. S. Paterson, and S. L. Tanimoto. Optimal packing and covering in the plane are NP-complete. *Information Processing Letters*, 12(3):133 – 137, 1981.

[10] G. C. Han and S. J. Na. A study on torch path planning in laser cutting processes part 2: Cutting path optimization using simulated annealing. *Journal of Manufacturing Systems*, 18(2, Supplement 1):62 – 70, 1999.

[11] S. Imahori, M. Kushiya, T. Nakashima, and K. Sugihara. Generation of cutter paths for hard material in wire EDM. *Journal of Materials Processing Technology*, 206(1-3):453 – 461, 2008.

[12] A. A.S. Leão, F. M.B. Toledo, J. F. Oliveira, and M. A. Carravilla. A semi-continuous mip model for the irregular strip packing problem. *International Journal of Production Research*, 54(3):712–721, 2016.

[13] M. K. Lee and K. B. Kwon. Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm. *International Journal of Production Research*, 44(24):5307 –5326, 2006.

[14] U. Manber and S. Israni. Pierce point minimization and optimal torch path determination in flame cutting. *Journal of Manufacturing Systems*, 3(1):81 – 89, 1984.

[15] L. M. Moreira, J. F. Oliveira, A. M. Gomes, and J. S. Ferreira. Heuristics for a dynamic rural postman problem. *Computers & Operations Research*, 34(11):3281 – 3294, 2007.

[16] A. Pott and H. Glaab. Optimization problems in a semi-automatic device for cutting leather. In *Mathematics - Key Technology for the Future*, pages 609 – 622. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[17] A. M. Rodrigues and J. S. Ferreira. Cutting path as a rural postman problem: solutions by memetic algorithms. *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*, 3(1):31 – 46, 2011.

[18] M. O. Rodrigues and F. M. B. Toledo. A clique covering mip model for the irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research*, 87:221 – 234, 2017.

[19] S. U. Sherif, N. Jawahar, and M. Balamurali. Sequential optimization approach for nesting and cutting sequence in laser cutting. *Journal of Manufacturing Systems*, 33(4):624 – 638, 2014.

[20] F. M. B. Toledo, M. A. Carravilla, C. Ribeiro, J. F. Oliveira, and A. M. Gomes. The dotted-board model: A new MIP model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2):478 – 487, 2013.

[21] G. Wäscher, H. Haußner, and H. Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109 – 1130, 2007.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0302