Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Caracterização de caos no Mapa Padrão generalizado

Henrique Figueiredo Cherulli[1]
Priscilla Sousa-Silva[2]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP
Câmpus de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, SP

Na atualidade, existem diversos fenômenos naturais que podem ser modelados através de sistemas dinâmicos não-lineares, que são sempre caracterizados por regras matemáticas bem definidas, podendo apresentar resoluções simples. No entanto, em alguns casos, pequenas variações das condições inicias dos mesmos, podem levar a um comportamento completamente imprevisível, sendo chamado de comportamento caótico. Esse tipo de comportamento faz com que duas soluções, partindo de condições iniciais próximas, passem a divergir exponencialmente com o passar do tempo. Devido ao grande número de fenômenos que apresentam esse tipo de comportamento, há uma vasta área de aplicação para o estudo do mesmo, desde ciências exatas, como física e química, até problemas biológicos e sociais, como o crescimento de uma população, além de problemas frequentemente encontrados na engenharia [1, 3].

A divergência exponencial apresentada por fenômenos com condições iniciais próximas, pode ser observada matematicamente através do cálculo do expoente de Lyapunov, que mede a velocidade com que dois pontos iniciais muito próximos divergem com o tempo no espaço, tornando-se completamente diferentes [1, 3]. Para demonstrá-lo, utilizamos uma função $X(t)$ com duas variáveis inicias próximas uma da outra, que geram duas curvas que se distanciam seguindo uma função vetorial $\delta(t)$. No instante inicial, a distância entre as duas curvas da função $X(t)$ deve ser muito pequena, da ordem de $||\delta(t)|| = 10^{-15}$.

Com o tempo, esse valor pode aumentar ou diminuir, de modo que a função $\delta(t)$ pode ser representada através da seguinte relação exponencial:

$$||\delta(t_0)|| \approx ||\delta(t)|| \exp^{\lambda t}, \tag{1}$$

onde o número λ é o expoente de Lyapunov [3].

O termo Caos pode ser definido como um comportamento aperiódico a longo prazo em um sistema determinístico que apresenta sensível dependência da condição inicial [3]. Uma vez que o expoente de Lyapunov mede o quanto a função é sensível às variações da condição inicial, sua análise permite a identificação da ocorrência ou não do caos.

Uma abordagem matemática da Eq. (1) permite observar que quando λ é positivo, o valor de $||\delta(t)||$ aumenta exponencialmente, o que define o caos, enquanto quando o

[1]henriquecherulli@yahoo.com.br
[2]priscilla.silva@unesp.br

expoente λ tente ao infinito negativo o valor de $||\delta(t)||$ tende a zero, o que caracterizaria uma não sensibilidade às variações das condições inicias, ou seja, ausência de caos.

Um dos mapas caóticos mais estudados é o mapa padrão e sua variante, o mapa padrão generalizado. Vários sistemas e mapas dinâmicos de tempo contínuo podem ser reduzidos localmente a esses mapas, por isso a importância de se compreender e analisar os diversos fenômenos dinâmicos desse modelo matemático. Dentre as diversas aplicações, estão a dinâmica de cometas no sistema solar e o magnetotransporte de elétrons em um diodo de tunelamento ressonante, entre outros (SOUSA-SILVA; TERRA, 2017). Este mapa pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k + p_k \ (\mathrm{mod} 2\pi) \\ p_{k+1} &= (1-\nu)p_k + f_0 \sin(\theta_k + p_k), \end{aligned} \tag{2}$$

onde θ e p são a posição angular e o momento linear de um rotor forçado. Os parâmetros $f_0 \geqslant 0$ e $\nu \in [0, 1]$ correspondem, respectivamente, à amplitude do forçante e à dissipação devido ao amortecimento.

Neste trabalho caracterizamos regimes dinâmicos do mapa padrão utilizando expoentes de Lyapunov.

Referências

[1] K. T. Alligood, T. Sauer, J. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems.* Springer, New York, 1996.

[2] P.A. Sousa-Silva, M.O. Terra. Biparametric investigation of the general standard map: multistability and global bifurcations. *Computational and Applied Mathematics*, 2017. doi:https://doi.org/10.1007/s40314-017-0544-8.

[3] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos.* Perseus Books, Reading, 1994.