Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Coloração Total Absolutamente Equilibrada em Grafos Regulares

Abel Rodolfo García Lozano[1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Departamento de Matemática
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Angelo Santos Siqueira [2]
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Sergio Ricardo Pereira de Mattos[3]
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Jhoab Negreiros[4]
Universidade do Grande Rio - Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades

Resumo. Neste trabalho introduzimos o conceito de coloração total absolutamente equilibrada e provamos que para $n, k \in \mathbb{N}$, se $(k+1)|n$, existe um grafo k-regular conexo com n vértices que admite uma coloração total absolutamente equilibrada com no máximo $\Delta + 2$ cores. Esse resultado mostra que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que possibilita a construção de uma família de grafos regulares, denominados grafos harmônicos. Finalizamos apresentando um resultado relacionado ao invariante conectividade, mostrando que os grafos harmônicos não possuem vértice de corte, fato que implica que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

Palavras-chave. Coloração Total Absolutamente Equilibrada, Grafos Harmônicos, Vértice de Corte.

1 Introdução

Em 2011, FRIEDMANN *et al.* [3] mostraram que se um grafo $G(V, E)$ possui uma coloração de vértices com folga de ordem Δ com t cores, então essa coloração pode ser estendida para uma coloração total de G com no máximo $t + 1$ cores. Posteriormente, LOZANO *et al.* [8] provaram que se um grafo regular admite uma coloração com folga de ordem Δ com $\Delta + 1$ cores, então a coloração de vértices pode ser completada para uma coloração total equilibrada com no máximo $\Delta + 2$ cores. Em 2016, LOZANO, SIQUEIRA e MATTOS [5] apresentaram uma heurística, baseada no conceito de famílias consistentes,

[1]abel.garcia.lozano@gmail.com
[2]asiqueira@unigranrio.edu.br
[3]rickdemattos@gmail.com
[4]jhoabnegreiros@gmail.com

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

para coloração total de grafos, que satisfaz a conjectura de Vizing-Behzad. O objetivo geral do presente trabalho é apresentar uma possibilidade de se obter famílias de grafos que admitem coloração total absolutamente equilibrada. Além disso, provamos uma importante propriedade desta família.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente revisamos conceitos básicos de grafos e coloração, e apresentamos alguns resultados referentes à coloração de vértice com folga de ordem Δ que garantem uma extensão natural para coloração total com no máximo $\Delta + 2$ cores, que no caso dos grafos regulares é absolutamente equilibrada [3, 8]. Em seguida, mostramos como construir uma família dos grafos harmônicos sem utilizar o conceito de produto funcional de grafos [10]. Finalizamos, apresentando um resultado relacionado ao invariante conectividade, mostrando que os grafos harmônicos possuem conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

2 Conceitos Básicos

Nesta seção, apresentamos definições básicas e terminologias da teoria dos grafos utilizadas no decorrer do trabalho, e que podem ser encontradas em [1, 2].

Um **grafo simples** $G(V, E)$ é uma estrutura composta por um conjunto V de **vértices** e um conjunto E de **arestas**, tais que V é finito não vazio e E é formado por subconjuntos de dois elementos de V. Representamos, respectivamente, por $|V|$ ou n e por $|E|$ ou m, os números de vértices e arestas de um grafo. Dados u e v, vértices quaisquer de $G(V, E)$ se existir a aresta $\{u, v\}$, escreveremos uv. Se $\{u, v\} \in E(G)$, então dizemos que a aresta é incidente a u e v, que u e v são adjacentes, e que u é vizinho de v.

Para cada vértice v, o número de arestas incidentes em v é dito **grau do vértice** e é representado por $d(v)$. O conjunto de vizinhos de um vértice v de G é denotado por $N_G(v)$ ou simplesmente $N(v)$. O número $\Delta(G) = max\{d_G(v) : v \in V\}$ é o grau máximo de G. Se todos os vértices de um grafo G tem o mesmo grau k, então G é **k-regular** ou simplesmente **regular**. Se um grafo G com n vértices é **(n-1)-regular**, então ele é denominado **grafo completo de ordem n** e denotado por K_n. Um **caminho** em um grafo G é uma sequência finita e não nula $S = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_k, v_k$ cujos os termos são alternativamente vértices e arestas, tais que os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i, com $i = 1 \ldots k$, e nenhum elemento de S se repete.

Dados dois grafos $G(V, E)$ e $G'(V', E')$, dizemos que G' é subgrafo induzido de G, se $V' \subset V$ e para todo par de vértices $u, v \in V'$ tem-se que $uv \in E'$, se e somente se $uv \in E$. Um grafo $G(V, E)$ é dito **conexo** se para todo par de vértices $x, y \in V$, existe um caminho que liga x e y. Caso contrário, dizemos que G é **desconexo**. Se para cada par de vértices $x, y \in V$, existem pelo menos k caminhos disjuntos ligando x com y, então $G(V, E)$ é dito **k-conexo**. Uma **componente conexa** de um grafo é qualquer subgrafo induzido conexo. Um vértice v em um grafo conexo é um **vértice de corte**, se ao removê-lo o grafo torna-se desconexo.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0259

3 Coloração em Grafos

Nesta seção, apresentamos as definições de coloração de vértices, de arestas, coloração com folga, coloração total e introduzimos o conceito de coloração total absolutamente equilibrada, que servirão de suporte para o restante do trabalho. Estes conceitos, assim como propriedades e resultados referentes a essas colorações, podem se encontrados com maior profundidade e detalhamento em [3, 9, 11, 12].

A **coloração** é um problema clássico em teoria dos grafos. Dado um grafo $G(V, E)$, e um conjunto $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, uma coloração de G com os elementos de C é uma aplicação $c : A \subset V \cup E \to C$, tal que dois elementos adjacentes ou incidentes de A possuem sempre imagens distintas. Se $A = V$ é dita **coloração de vértices**, se $A = E$ é dita **coloração de arestas** e se $A = V \cup E$ é dita **coloração total**.

Uma coloração de $G(V, E)$ com as cores de $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ é **equilibrada** se, para todo par de cores c_i e c_j, tal que $i \neq j$, tem-se $|a(c_i) - a(c_j)| \leq 1$ com $i, j = 1, \ldots k$ e $a(c_i)$ e $a(c_j)$ representam, respectivamente, os números de aparições das cores c_i e c_j na coloração.

Definição 3.1. *Dado um grafo $G(V, E)$, um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ e uma coloração $c : S \subseteq E \cup V \to C$ de G. A coloração c é **absolutamente equilibrada** se, para todo par de cores tal que $i \neq j$, tem-se $a(c_i) = a(c_j)$.*

Seja um grafo $G(V, E)$ e um conjunto de cores $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_p\}$ com $p \in \mathbb{N}$, seja ainda $|c(N(v))|$ a cardinalidade do conjunto de cores da vizinhança de v, uma aplicação $f : V \to C$ é uma **coloração de vértices com folga de ordem k** de G se para todo $v \in V$:

- se $d(v) < k$, então $|c(N(v))| = d(v)$;
- se $d(v) \geq k$, então $|c(N(v))| \geq k$.

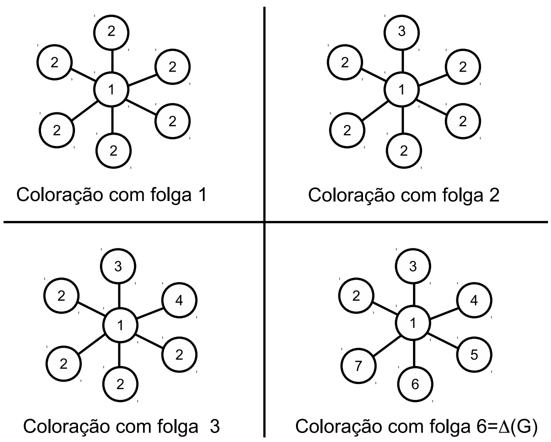

Figura 1: Coloração com folga de ordem 1, 2, 3 e $6 = \Delta(G)$, respectivamente.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0259

Observe que na coloração de vértices com folga de ordem k, os vértices com grau menor que a k devem ter todos os vizinhos coloridos com cores distintas; já os de grau igual ou maior do que k devem utilizar pelo menos k cores na coloração de sua vizinhança. Para $k = 1$, temos a coloração usual de vértices e para $k = \Delta$ temos a coloração 2-distante [9].

4 Relação entre Coloração com folga e Coloração Total Absolutamente Equilibrada em Grafos Regulares

Nesta seção, apresentamos três teoremas que têm como objetivo mostrar que se um grafo regular pode ser colorido com folga Δ com $\Delta + 1$ cores, então existe uma extensão da coloração com no máximo $\Delta + 2$ cores e essa extensão é absolutamente equilibrada. Esses resultados podem ser encontrados em [3, 8].

Teorema 4.1. *[8] Sejam $G(V, E)$ um grafo regular e $c : V \to C = \{1, 2, \ldots \Delta + 1\}$ uma coloração com folga de ordem Δ. Então:*

(a) $\Delta + 1$ divide $|V|$;

(b) Cada cor $i \in C$, é usada exatamente $\frac{|V|}{\Delta+1}$ vezes.

Teorema 4.2. *[3] Sejam $G(V, E)$ um grafo com grau máximo Δ e $c : V \to C = \{1, 2, 3, \ldots k\}$, uma coloração com folga de ordem Δ de G. Então, existe uma coloração total de G com no máximo $k + 1$ cores.*

Teorema 4.3. *[8] Sejam $G(V, E)$ um grafo regular e $c : V \to C = \{1, 2, \ldots \Delta + 1\}$ uma coloração com folga de ordem Δ. Então, existe uma coloração total absolutamente equilibrada de G com no máximo $\Delta + 2$ cores.*

5 Grafos Harmônicos

Em [4] LOZANO *et al.* introduziram o conceito de produto funcional de grafos e de grafos k-suporte para auxiliar na costrução dos grafos harmônicos. Mais tarde, [6] LOZANO *et al.* mostraram que o produto funcional permite gerar infinitos grafos harmônicos, a partir de qualquer grafo regular. Nesta seção, apresentamos uma forma de se obter grafos harmônicos sem utilizar o produto funcional de grafos [10]. Mostramos que existe uma relação entre a regularidade e número de vértices do grafo que possibilita a construção dos grafos harmônicos. Finalizamos provando que os grafos harmônicos não possuem vértices de corte.

Definição 5.1. *[8] Um grafo $G(V, E)$ regular é dito **harmônico**, se admite uma coloração de vértices com folga Δ com $\Delta + 1$ cores.*

Teorema 5.1. *[10] Sejam n e $k \in \mathbb{N}$, se $(k+1)|n$, então existe um grafo conexo harmônico k-regular com n vértices.*

Demonstração. Sejam n, k e $t \in \mathbb{N}$ tais que $n = t \cdot (k+1)$, se $t = 1$, então o grafo K_n é o grafo procurado. Caso contrário, vamos construir o grafo $G(V, E)$ como se segue:

Seja $V = \{v_{10}, \ldots, v_{1k}, v_{20}, \ldots, v_{2k}, \ldots, v_{t0}, \ldots, v_{tk}\}$, definimos o conjunto E de arestas da seguinte forma:

Dois vértices v_{ij} e $v_{i'j'}$, com $i, i' \in \{1, 2, \ldots, t\}$ e $j, j' \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, são adjacentes quando:

- Para $i = i^{'}$, se $j = 0$, então $j^{'} \neq 1$;
- Para $i^{'} = i + 1$ $(mod\ t)$, se $j = 0$, então $j^{'} = 1$.

A cada vértice v_{ij}, damos a cor j do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$. O resultado é uma coloração com folga $\Delta(G)$ que utiliza $\Delta + 1$ cores. Logo, o grafo G é harmônico. $\square$

As figuras 2, 3, 4 e 5 ilustram a prova do Teorema 5.1. Para exemplificar, adotamos $n = 15$, $k = 4$ e $t = 3$.

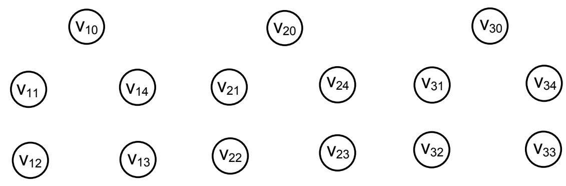

Figura 2: Conjunto de Vértices $V = \{v_{10}, \ldots, v_{14}, v_{20}, \ldots, v_{24}, \ldots, v_{t0}, \ldots, v_{34}\}$.

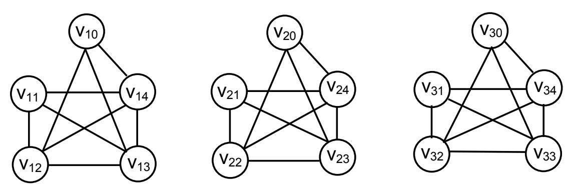

Figura 3: Conjunto de arestas de $G(V, E)$, de acordo com a primeira condição.

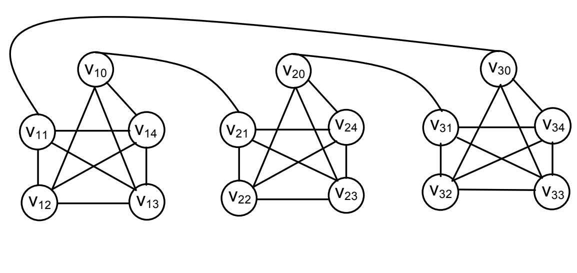

Figura 4: Conjunto de arestas de $G(V, E)$, de acordo com a primeira e a segunda condição.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0259

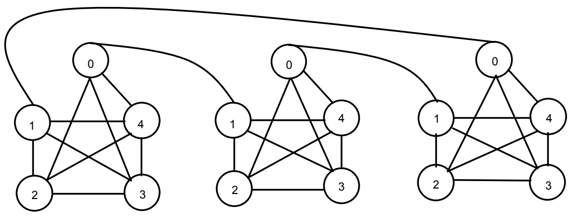

Figura 5: Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores.

Observe que todo grafo harmônico, por definição, satisfaz o Teorema 4.1, resultado que oferece uma condição necessária para existência dessa família de grafos regulares.

Vale destacar que os grafos harmônicos apresentam propriedades relacionadas ao invariante conectividade que favorecem sua aplicação em sistemas computacionais multiagentes [7]. O próximo Teorema prova que os grafos harmônicos não possuem vértices de corte e tem como consequência que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

Teorema 5.2. *Os grafos harmônicos não possuem vértices de corte.*

Demonstração. Sejam $G(V, E)$ um grafo harmônico e $c : V \to C = \{0, 1, 2, \ldots, \Delta\}$ uma coloração com folga Δ dos vértices de G. Suponhamos por absurdo que G possui um vértice de corte $u \in V$ e sem perder generalidade suponhamos que o vértice u foi colorido com a cor 0. Seja $G'(V', E')$ uma das componentes conexas obtidas ao se retirar u do grafo G. Observe que as cores de $C - \{0\} = \{1, 2, \ldots, \Delta\}$ são usadas o mesmo número de vezes em G', pois em uma coloração com folga Δ todos os vértices adjacentes são coloridos com cores distintas, logo dadas duas cores arbitrárias $i \in C - \{0\}$ e $j \in C - \{0\}$ todo vértice de V' com a cor i possui um e somente um vizinho com a cor j. Denotemos por V_i' o conjunto de vértices de G' coloridos com a cor $i \in C$, seja $q = |V_i|$, $i \in C - \{0\}$ se $|V_0'| = q$, então todos os vértices de V' coloridos com cor diferente de 0 têm um vizinho em V_0', logo nenhum deles pode ser vizinho de u, o que é um absurdo. Se $|V_0'| < q$, então existem pelo menos Δ vértices de G' com cor diferente de 0 que não possuem vizinho em V_0'. Mas o número de vizinhos de u em G' é menor que Δ, logo existem vértices de V' com cor diferente de 0 que não tem vizinho com a cor 0. O que é um absurdo. ☐

Do Teorema 5.2 se obtém, de forma imediata, o seguinte colorário.

Corolário 5.1. *Sejam $u, v \in V$ dois vértices quaisquer de $G(V, E)$, se G é um grafo harmônico, então existe um ciclo em G que contém u e v.*

6 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos uma nova maneira de se gerar grafos harmônicos e mostramos que essa família de grafos regulares admite uma coloração total absolutamente equilibrada com no máximo $\Delta + 2$ cores. Mostramos que existe uma relação entre a regularidade e número de vértices do grafo que possibilita a construção dos grafos harmônicos. Por fim, provamos que os grafos harmônicos não possuem vértice de corte e obtemos como consequência desse resultado o fato de que todo grafo harmônico possui conectividade de vértices $\kappa(G) \geq 2$.

Referências

[1] J. Bondy, U. Murty. *Graph Theory with Applications.* North-Holland, New York, 1976.

[2] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] C. V. P. Friedmann, A. R. G. Lozano, L. Markenzon and C. F. E. M. Waga, Total coloring of Block-cactus graphs, *The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, 78: 273–283, 2011.

[4] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, S. Jurkiewicz, C.V.P. Friedmann, Produto Funcional de Grafos, *TEMA*, 14: 221–232, 2013.

[5] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira e S. R. P. Mattos. Famílias Consistentes e a Coloração Total de Grafos, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, volume 5, 2017. DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0230.

[6] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, S. R. P. Mattos e S. Jurkiewicz, Produto funcional de grafos: um modelo para conexão de sistemas multiagentes, *TEMA*, 17: 341–352, 2016.

[7] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira and S. R. P. Mattos, Functional Product of Graphs and Multiagent Systems, *Global Journal of Science Frontier Research: Mathematics and Decision Sciences*, 17: 15–28, 2017.

[8] A. R. G. Lozano, A. S. Siqueira, C. V. P. Friedmann and S. Jurkiewicz, Relationship between equitable total coloring and range coloring in some regular graphs, *Pesquisa Operacional*, 28: 161–171, 2016.

[9] A. R. G. Lozano, C. V. P. Friedmann, C. F. E. M. Waga and L. Markenzon. Coloração de Vértices com Folga, *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (XLI SBPO)*, Porto Seguro, Bahia, Brasil, 2009.

[10] S. R. P. Mattos. Produto Funcional de Grafos: Propriedades e Aplicações, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2017.

[11] A. S. Siqueira. Coloração Total Equilibrada em Subfamílias de Grafos Regulares, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2011.

[12] H. Yap. *Total colourings of graphs.* Springer, Berlin, 1996.

