Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O problema de torção elastoplástica e sua resolução numérica via complementariedade

Bruno M. Fernandes[1]
Departamento de Matemática,UFJF, Minas Gerais, Brazil
Sandro R. Mazorche[2]
Departamento de Matemática,UFJF, Minas Gerais, Brazil
Daniel A. Gutierrez-Pachas[3]
Departamento de Matemática,UFJF, Minas Gerais, Brazil

Neste trabalho estudamos o *problema de torção elastoplástica* (ou simplesmente, PTE) de uma barra cilíndrica isotrópica e homogênea. Este problema é descrito via um modelo de otimização com restrições, como segue:

$$\text{Obter } u \in \mathbb{K} \, : \, \mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v), \ \ \forall\, v \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

sendo $\mathcal{J} : \mathbb{K} \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega) \to \Re$ o funcional definido em [4, Equação (6.9)] e o conjunto convexo de soluções viáveis, dado por $\mathbb{K} = \{u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) : \|\nabla u(x,y)\| \leq 1, \forall\,(x,y) \in \Omega\}$. Isto leva a classificar Ω em $\Omega_{\mathrm{P}} = \{(x,y) \in \Omega : \|\nabla u(x,y)\| = 1\}$ (*região plástica*) e $\Omega_{\mathrm{E}} = \{(x,y) \in \Omega : \|\nabla u(x,y)\| < 1\}$ (*região elástica*). Também (1) pode ser formulado via um *problema de complementaridade generalizada* (PCG), da forma:

$$\text{Obter } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \, : \, \begin{cases} -\triangle u(x,y) - c(x,y) \geq 0, \ \ \forall\,(x,y) \in \Omega, \\ \quad 1 - \|\nabla u(x,y)\| \geq 0, \ \ \forall\,(x,y) \in \Omega, \\ \big(- \triangle u(x,y) - c(x,y)\big)\big(1 - \|\nabla u(x,y)\|\big) = 0, \ \ \forall\,(x,y) \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

No entanto, é possível procurar a solução de (1) num conjunto mais conveniente, dado por $\mathbb{K}_d = \big\{u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) : |u(x,y)| \leq d(x,y), \forall\,(x,y) \in \Omega\big\}$, sendo d a função distancia de um ponto em Ω até a fronteira ($\partial\Omega$). Isto leva obter a solução de (1), quando resolvemos

$$\text{Obter } u \in \mathbb{K}_d \, : \, \mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v), \ \ \forall\, v \in \mathbb{K}_d, \tag{3}$$

Além disso, a solução de (3) pode ser escrito como um *problema de complementariedade mista*(PCM), da forma:

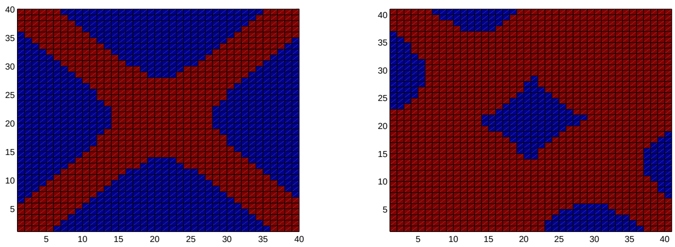
$$\text{Obter } u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \, : \, \begin{cases} -\triangle u(x,y) - c(x,y) = 0, \ \text{se } -d(x,y) < u(x,y) < d(x,y), \\ -\triangle u(x,y) - c(x,y) > 0, \ \text{se } u(x,y) = -d(x,y), \\ -\triangle u(x,y) - c(x,y) < 0, \ \text{se } u(x,y) = d(x,y). \end{cases} \tag{4}$$

[1]bruno.moreira2015@engenharia.ufjf.br
[2]mazorche@ufjf.br
[3]dgutip@icmc.usp.br

Proposta, exemplo numérico, e trabalhos relacionados

Nós propomos resolver numericamente os problemas de complementariedade (2) e (4) combinando o *método de diferenças finitas* (MDF) e o FDA-MNCP (em ingles, *feasible directions interior-point algorithm for mixed nonlinear complementarity problems*) e comparar as soluções. Considerando $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ilustramos a teoria resolvendo numericamente (4) e representando as regiões plástica e elástica (veja Figura 1) nos casos: (a) Se c é constante, definimos $c(x,y) = 10$, $\forall\,(x,y) \in \Omega$. (b) Se c é variável, definimos

$$c(x,y) = \begin{cases} 10, & \forall\,(x,y) \in\,]0,1/2[\times]1/2,1[\,, \\ -10, & \forall\,(x,y) \in\,]1/2,1[\times]0,1/2[\,, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



(a) c é constante (b) c é variável

Figura 1: Representação das regiões plástica (azul) e elástica (vermelho) para os casos (a) e (b) usando o MDF com tamanho de passo $\frac{1}{40}$.

Entre os trabalhos relacionados, na literatura existem muitas aplicações que podem ser resolvidas via complementariedade, veja [1, 4]. Nosso grupo, também tem pesquisas similares como por exemplo em [2, 3].

Referências

[1] M. C. Ferris and J. S. Pang. Engineering and economic applications of complementarity problems. *SIAM Review*, 39(4):669–713, 1997.

[2] Angel E. R. Gutierrez, Sandro R. Mazorche, José Herskovits, and Grigori Chapiro. An interior point algorithm for mixed complementarity nonlinear problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 175(2):432–449, Nov 2017.

[3] Daniel A. Gutierrez-Pachas. Inequações variacionais e aplicações em problemas tipo obstáculo com resolução numérica via complementaridade. *Dissertação de mestrado em matematica da Universidade Federal de Juiz de Fora*, 2013.

[4] J.-F. Rodrigues. *Obstacle problems in mathematical physics*, volume 34. Birkhaüser, Amsterdam, 1987.

