Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Equações diferenciais estocásticas: teoria e aplicação em finanças

Martinelle Araujo dos Santos[1]
Departamentos de Matemática e Ciências da Computação - UFMG
Pedro Callado Versiani de Souza Ferreira[2]
Departamentos de Matemática e Ciências da Computação - UFMG
Lucas Resende[3]
Departamentos de Matemática e Ciências da Computação - UFMG
Raí Beirão Augusto dos Santos[4]
Departamentos de Matemática e Ciências da Computação - UFMG
Uriel Moreira Silva[5]
Departamento de Estatística - UFMG
Denise Burgarelli Duczmal[6]
Departamento de Matemática - UFMG

Equações diferenciais [2] são úteis para modelagem de inúmeros fenômenos reais, como propagação de calor, ondas e diversos processos mecânicos e elétricos. Porém, para uma grande parte dessas modelagens, uma solução determinística não é satisfatória: muitas vezes observamos algum tipo de ruído que pode vir, por exemplo, de erros de precisão dos instrumentos de medição utilizados, ou que pode até ser inerente ao fenômeno em si [6]. Conseguimos, portanto, obter resultados melhores ao incluir ruído em um modelo, tomando esse como proveniente de um processo aleatório. Nesse caso, chegamos às equações diferenciais estocásticas (EDEs), que constituem um campo crescente de pesquisa e propiciam modelos mais precisos para diversas aplicações, como crescimento populacional, mercado financeiro, osciladores e redes neurais [4] [5].

Nesse trabalho apresentaremos as bases matemáticas para a construção da teoria da integral de Itô e solução de EDEs [6]. Em seguida, veremos uma aplicação em finanças, obtendo e comparando as soluções analítica e numérica [7] da equação de Black-Scholes [1]. Para tanto, realizamos um grande número de simulações numéricas da equação e comparamos as funções de densidade finita obtidas em cada caso. Para as simulações, utilizamos o método de Euler-Maruyama para EDEs implementado na linguagem Python.

---

[1]martinelle17@gmail.com
[2]pedrocallado@gmail.com
[3]lucasresenderc@gmail.com
[4]rai.ufmg@gmail.com
[5]urielmoreirasilva@gmail.com
[6]dburgarelli@gmail.com

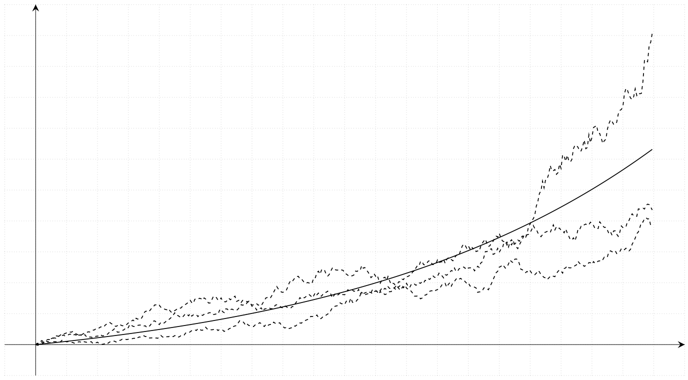

Figura 1: Exemplo de fenômenos sem e com ruído

A Figura 1 contém um caminho simulado da EDE $dX(t) = 0.1X(t) + 0.1X(t)dW(t)$, onde $W(t)$ é um movimento Browniano. A linha contínua representa a solução exata da equação considerando uma componente estocástica nula, isto é, $dX(t) = 0.1X(t)$, enquanto que as linhas pontilhadas representam três trajetórias simuladas de $X(t)$ utilizando o método de Euler-Maruyama.

Em essência, o método de Euler-Maruyama [4] é um método numérico análogo ao método de Euler tradicional para equações diferenciais determinísticas [3], e consiste basicamente em aproximar os diferenciais $dX(t)$ e $dW(t)$ por suas versões análogas discretas, isto é, $\Delta X(t) := X(t+\delta t) - X(t)$ e $\Delta W(t) := W(t+\delta t) - W(t)$ para $\delta t \to 0$. Sob certas condições, o método apresenta aproximações razoáveis para o caminho de $dX(t)$.

Referências

[1] Black, F., Scholes, M. *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of political economy, vol. 81 (3), p. 637-654, 1973.

[2] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Haines, C. W. *Elementary differential equations and boundary value problems.* Wiley New York, 1969.

[3] Golub, G. H. and Ortega, J. M. *Scientific computing and differential equations: an introduction to numerical methods.* Elsevier, 2014.

[4] Iacus, S. M., *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations.* Springer, New York, 2008.

[5] Mao, X. *Stochastic differential equations and applications.* Elsevier, 2007.

[6] Øksendal, B. . *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Harper-Row, Berlim, 2010.

[7] Silva, F. A., Duczmal, L. H., Burgarelli, D. D. *Introdução aos Métodos de Simulação e Análise Numérica para Equações Diferenciais Estocásticas.* SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos, 2016.

