

Aquecimento Eletromagnético para Meio Poroso Cilíndrico Saturado com Água

Samuel Oliveira de Almeida¹

Pós-Graduação em Modelagem Computacional, UFJF, Juiz de Fora, MG

Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais, Santos Dumont, MG

Grigori Chapiro²

Departamento de Matemática, UFJF, Juiz de Fora, MG

Resumo Apresentamos um estudo motivado na recuperação de óleo pesado utilizando injeção de água que é aquecida por meio de ondas eletromagnéticas (EM) de alta frequência. Anteriormente, foi proposto um modelo matemático unidimensional que descreve um experimento em baixa escala, o modelo é formado por duas equações diferenciais, uma para o balanço de energia e outra para a conservação de massa da água. Este trabalho estende o modelo para o caso tridimensional (3D) considerando um domínio cilíndrico axissimétrico, aproximando melhor as condições experimentais e servindo como base para novos experimentos. Os resultados obtidos foram validados com os dados experimentais.

Palavras-chave. Aquecimento Eletromagnético, Equações Diferenciais Parciais, Recuperação Avançada.

1 Introdução

Em geral, técnicas avançadas de recuperação de petróleo são aplicadas em reservatórios que possuem uma grande quantidade de óleo pesado. Técnicas térmicas possuem um papel importante nessa recuperação, pois o aumento da temperatura nos reservatórios possibilita a diminuição da viscosidade do óleo elevando o seu raio de mobilidade. O aquecimento eletromagnético (EM) é uma técnica térmica não convencional que pode ser aplicada junto a injeção de água, buscando manter o aumento da temperatura da água mesmo em altas profundidades. Um experimento em baixa escala foi descrito em [4], onde foi injetada água num meio poroso cilíndrico, aquecido por meio de ondas eletromagnéticas (EM). Os resultados desse trabalho mostram que o aquecimento mediante ondas EM melhoraram o deslocamento do óleo pela água.

Em [4], o modelo matemático unidimensional (1D) que descreve o experimento mencionado, consiste de duas leis de balanço, uma para a energia (1), e outra para a massa da água (2).

$$C_{tot}(s_w)\partial_t T + C_{liq}(s_w)\partial_x(\mathbf{u}T) = K_m(s_w)\partial_x^2 T + C_{ter}(T - T_0) + W(x, s_w), \quad (1)$$

$$\phi\partial_t s_w + \partial_x(\mathbf{u}f_w(T, s_w)) = 0. \quad (2)$$

¹samuel.oliveira@ifsudestemg.edu.br

²grigori@ice.ufjf.br

Onde C_{tot} é a capacidade térmica do sistema, C_{liq} a capacidade térmica da fase líquida, C_{ter} o coeficiente do termo linear das trocas térmicas, T a temperatura medida em Kelvin, W a absorção de energia em $[J/s]$, baseada em [3], s_w a saturação da água, K_m é a condutividade térmica, ϕ a porosidade e a velocidade de Darcy $\mathbf{u}[m/s]$ constante.

Para o caso unidimensional (1D), a solução do sistema (1) e (2) foi encontrada fazendo várias suposições, as quais levaram a um caso mais simples. Para a equação (1), uma vez feito o adimensionamento do problema original seguido de uma mudança de variável, reduzimos a equação de forma a eliminar o termo convectivo, e conseqüentemente pode-se utilizar o princípio de Duhamel, para mais detalhes ver [1] e [5]. A equação (2) que é uma equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem, foi resolvida usando a função de Fluxo Buckley-Leverett f_w , para isto, foi utilizado a Teoria das Leis de Conservação, cuja solução contém ondas de Rarefação e de Choque, para mais detalhes ver [2] e [6].

Experimento - Aquecimento sem Escoamento: Neste experimento o meio poroso é saturado com água de tal maneira que possa ser considerado como $s_w = 1$. Não houve injeção de água e uma vez nestas condições inicia-se a radiação de energia EM, com uma potência de $300W$. O objetivo é testar a absorção de calor. Devido a não existência de injeção de fluido, a velocidade u é desconsiderada, anulando assim o termo de transporte em (1). Por outro lado, para a condição inicial considera-se a função constante da temperatura ambiente, no caso 20^0C , e a condição de fronteira como sendo a velocidade do fluido injetado, que é zero. Os resultados obtidos em [4] são mostrados na figura 1.

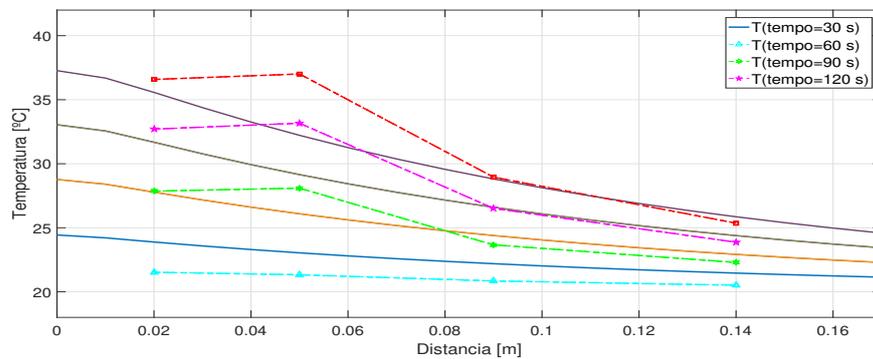


Figura 1: O meio poroso está saturado com água (sem fluxo) e aquecido por ondas EM. Considera-se condições de Neumann nula na fronteira e condição inicial igual a temperatura ambiente $u_0 = 20$. Para o tempo medido em segundos, as linhas contínuas representam as soluções analíticas e as linhas pontilhadas os dados retirados de termômetros colocados nas distâncias $0.02m$, $0.05m$, $0.09m$ e $0.14m$.

Sendo um método recente, poucas informações podem ser encontradas na bibliografia atual que possam auxiliar novos experimentos. Dessa forma, nosso trabalho tem como objetivo principal generalizar o modelo apresentado de forma que o mesmo possa ser utilizado em novos experimentos em escalas maiores. Para uma representação mais realista, propomos um estudo do modelo matemático considerando uma equação de balanço de

energia tridimensional (3D), em seguida utilizaremos coordenadas cilíndricas e simetria radial para compararmos com o modelo unidimensional. Para encontrar a solução utilizaremos a teoria de Storm-Liouville e o método de separação de variáveis.

2 Modelo Matemático (3D)

Para o caso (3D), o modelo adimensionalizado referente a equação (1) é dado por

$$\begin{cases} T_t + \nabla \cdot (vT) = k\Delta T + cT + W, \\ T(x, y, z, 0) = T_0 \end{cases} \quad (3)$$

onde k e c são constantes arbitrárias e $v = (a_1, a_2, a_3)$ é o vetor velocidade.

Consideremos a seguinte transformação

$$T(x, y, z, t) = e^{(\beta t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)} u(x, y, z, t) \quad (4)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{2k}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{2k}, \quad \alpha_3 = \frac{a_3}{2k} \text{ e } \beta = c - \frac{a_1^2}{4k} - \frac{a_2^2}{4k} - \frac{a_3^2}{4k} \quad (5)$$

obtemos então a equação simplificada do modelo, dada por

$$\begin{cases} u_t(x, y, z, t) = k\Delta u(x, y, z, t) + \Phi(x, y, z, t) \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \end{cases} \quad (6)$$

onde Φ e f são derivados da transformação (4).

Utilizando coordenadas cilíndricas e considerando o modelo axissimétrico, podemos reescrever a equação (6), da seguinte forma

$$\begin{cases} u_t = k \left[\frac{1}{r} (u_r + r u_{rr}) + u_{zz} \right] + \Phi(r, \varphi, z, t), \\ u(r, z, 0) = f(r, z). \end{cases} \quad (7)$$

Considerando $0 \leq r \leq a$ e $0 \leq z \leq L$, as condições de contorno e inicial para o experimento são dadas respectivamente por

$$u_r(a, z, t) = c \cdot (u(a, z, t) - u_0) \quad \text{perdas térmicas envolto ao cilindro,} \quad (8)$$

$$u_z(r, 0, t) = 0 \quad \text{sem fluxo de água na entrada do cilindro,} \quad (9)$$

$$u_z(r, L, t) = 0 \quad \text{sem fluxo de água na saída do cilindro,} \quad (10)$$

$$u(r, z, 0) = 20 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \text{temperatura ambiente como condição inicial.} \quad (11)$$

3 Solução do Modelo

O método de solução do problema proposto é similar a séries de Fourier, utiliza-se a Teoria de Storm-Liouville e o método de separação de variáveis. Começaremos primeiramente com o problema homogêneo, isto é $\Phi = 0$, supomos que

$$u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t) \Rightarrow RZT' = k \left(R''ZT + \frac{1}{r}R'ZT + RZ''T \right), \quad (12)$$

4

segue que

$$\frac{T'}{kT} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z}, \quad (13)$$

desta forma obtemos

$$\frac{T'}{kT} = -\gamma^2, \quad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\lambda^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -\mu^2, \quad \text{onde } \gamma^2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

Desta maneira, nos resta as seguintes equações

$$T' + k\gamma^2 T = 0, \quad (14)$$

$$Z'' + \mu^2 Z = 0, \quad (15)$$

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 - 0)r^2 R = 0. \quad (16)$$

Para a equação (15), temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} Z'' + \mu^2 Z = 0 \\ Z'(0) = 0 \\ Z'(L) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

a solução geral para $\lambda \geq 0$ é dada por

$$Z(z) = C_1 \cos(\mu z) + C_2 \sen(\mu z), \quad (18)$$

pelas condições de contorno, $C_2 = 0$ e $\sen(\mu L) = 0$, e a solução fica condicionada a μ . Dessa forma obtemos a família

$$Z_k(z) = C_1 \cos(\mu_k z). \quad (19)$$

Para a equação (16), o sistema é dado por

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 - 0)r^2 R = 0 \\ R'(a) = \alpha(R(a) - u_0) \\ |R(0)| < \infty, \end{cases} \quad (20)$$

a solução da EDO acima é dada na forma das equações de Bessel

$$R(r) = C_3 J_0(\lambda r) + C_4 Y_0(\lambda r), \quad (21)$$

como $R(0)$ é finito e $Y_0 \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 0$, obtemos $C_4 = 0$, além disso a condição de contorno deve ser satisfeita para todo λ_{kn} , isto é, pelas propriedades das funções de Bessel obtemos

$$-J_1((\lambda_{kn} a) \cdot \lambda_{kn} = \alpha(J_0(\lambda_{kn} a) - u_0), \quad (22)$$

a solução condicionada a λ_{kn} , pode ser escrita de forma geral como

$$R_{kn}(r) = C_3 J_0(\lambda_{nk} r). \quad (23)$$

Para a equação (14), o sistema é dado por

$$\begin{cases} T' + k\gamma_{kn}^2 T &= 0 \\ u(r, z, 0) &= f(r, z), \end{cases} \quad (24)$$

cuja a solução é dada por

$$T_{kn} = C_{kn} e^{-k(\lambda_{kn}^2 + m_k^2)t}, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Definindo

$$u(r, z, t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} T_{kn}(t) R_{kn}(r) Z_k(z), \quad (26)$$

obtemos pela condição inicial

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= f(r, z) \\ &= \sum_{k,n=0}^{\infty} T_{kn}(0) R_{kn}(r) Z_k(z) \\ &= \sum_{k,n=0}^{\infty} C_{kn} R_{kn}(r) Z_k(z), \end{aligned} \quad (27)$$

devido a ortogonalidade das famílias Z_k e R_{kn} , e pela Teoria de Sturm-Liouville podemos escrever f como expansão ortogonal e segue que

$$C_{kn} = \frac{\int_0^L \int_0^a f(r, z) R_{kn}(r) Z_k(z) r dr dz}{\int_0^a R_{kn}^2(r) r dr \int_0^L Z_k^2(z) dz}, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Para o caso não homogêneo da equação (7), consideraremos $\Phi \neq 0$ o termo fonte descrito em [4]. Suponhamos agora que,

$$u(r, z, t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} T_{kn}(t) R_{kn}(r) Z_k(z) \quad (29)$$

e

$$\Phi(r, z, t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} H_{kn}(t) T_{kn}(t) R_{kn}(r) Z_k(z), \quad (30)$$

e novamente pela ortogonalidade das famílias podemos escrever

$$H_{kn}(t) = \frac{\int_0^L \int_0^a \Phi(r, z, t) R_{kn}(r) Z_k(z) r dr dz}{\int_0^a R_{kn}^2(r) r dr \int_0^L Z_k^2(z) dz}, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

substituindo (29), (30) e (31) na equação não homogênea (7) obtemos

$$\sum T'_{kn} R_{kn} Z_k = k \left\{ \sum T_{kn} \left[(R''_{kn} + \frac{1}{r} R'_{kn}) Z_k + R_{kn} Z''_k \right] \right\} + \sum H_{kn} R_{kn} Z_k, \quad (32)$$

6

sendo

$$R''_{kn} + \frac{1}{r}R'_{kn} = -(\lambda_{kn}^2 - \mu_k^2)R_{kn} \quad \text{e} \quad Z''_k = -\mu_k Z_k, \quad (33)$$

obtemos

$$\sum T'_{kn} R_{kn} Z_k = \sum [(-k\gamma^2)T_{kn} + H_{kn}][R_{kn} Z_k], \quad (34)$$

e conseqüentemente

$$T'_{kn}(t) = -k\gamma_{kn}^2 T(t)_{kn} + H_{kn}(t) \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

concluimos desta forma

$$T_{kn}(t) = e^{-k\gamma_{kn}^2 t} \int_0^t e^{k\gamma_{kn}^2 s} H_{kn}(s) ds + C_{kn} e^{-k\gamma_{kn}^2 t} \quad (36)$$

Finalmente a solução de (7) é dada por (29), onde os termos Z_k , R_{kn} , T_{kn} e C_{kn} são dados respectivamente por (19), (23), (36) e (28).

4 Resultados

Utilizando os parâmetros físicos de [4], podemos observar a distribuição da temperatura no cilindro para o tempo igual 120s (segundos), dado pela figura (2). Aqui consideramos condição de Neumann igual a zero nos extremos do cilindro como apresenta o modelo em (9) e (10), já envolto ao cilindro consideramos Neumann com perdas térmicas como apresentado em (8).

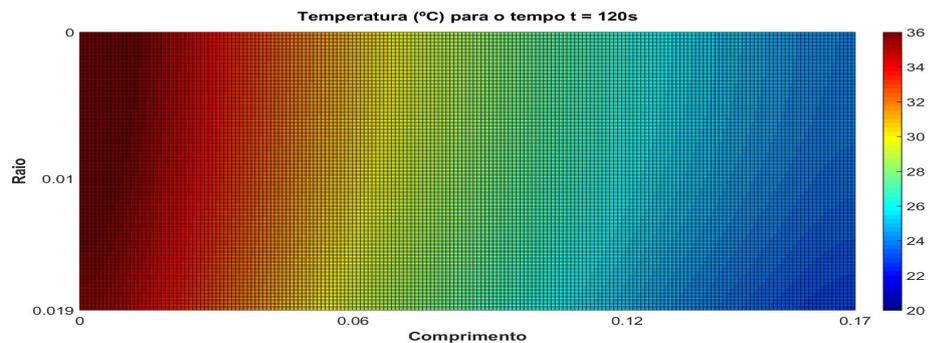


Figura 2: Experimento - O meio poroso é saturado com água, em seguida é ligado o microondas. Os valores aqui são representados para o tempo $t = 120s$.

Para comparar com os resultados obtidos em [4], calculamos em nosso modelo a temperatura média por seção radial para o caso $t = 120s$. A figura (3) mostra os dados encontrados em [4] junto ao modelo proposto nesse trabalho.

O modelo pode ser estendido para os outros experimentos descritos em [4].

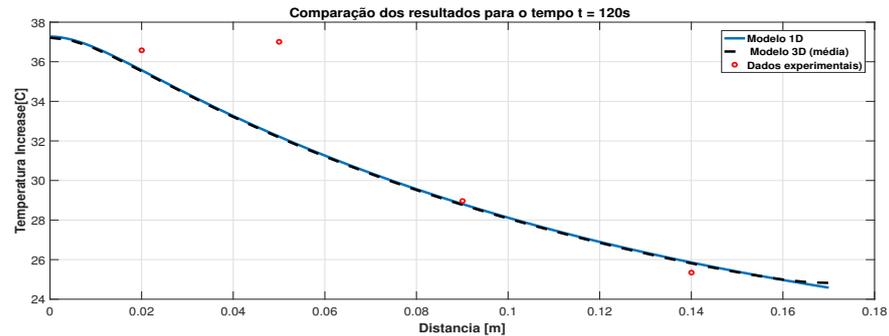


Figura 3: Nesta figura, os pontos vermelhos representam os dados obtidos pelos termômetros colocados no meio poroso, a linha pontilhada representa o modelo proposto em [4] e a linha contínua representa a temperatura média para o modelo generalizado (3D) proposto nesse trabalho.

5 Conclusões

Foi possível estender o modelo matemático descrito em [4] de forma mais realista utilizando coordenadas cilíndricas com simetria radial. O modelo poderá ser utilizado como auxílio para novos experimentos em escalas maiores. A equação foi resolvida analiticamente e os resultados foram comparados com os dados experimentais, comportando qualitativamente em concordância com o experimento e a física do problema.

Referências

- [1] K.S. Bhamra. Partial Differential Equations. *PHI Learning Pvt. Ltd*, New Delhi, 2010.
- [2] S. E. Buckley, M. C. Leverett. Mechanism of fluid displacement in sands. *Trans. AIME*, 146(01):107-116, 1942.
- [3] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz. Electrodynamics of Continuous Media. *Pergamon Press*, Pergamon, 1984.
- [4] P. Z. S. Paz, T. H. Hollmann, G. Chapiro, K. Heller, E. Kermen, E. Slob, P. L. J. Zitha. EM Heating-Stimulated Water Flooding for Medium-Heavy Oil Recovery. *Transp Porous Med.*, 119:57-75, 2017.
- [5] A. D. Polyanin. Handbook of Linear Partial Diferential Equations for Engineers and Scientists. *CRC Press*, London, 2001.
- [6] J. Smoller. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. *Springer*, New York, 1994.