

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de Desempenho da Formulação de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada em Problemas Advectivo-Difusivos

Vitor Pancieri Pinheiro¹

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM-UFES

Carlos Friedrich Loeffler Neto²

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM-UFES

Natan Sian das Neves³

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC-UFES

Resumo. As formulações mais usuais do método dos elementos de contorno para resolver problemas advectivos difusivos apresentam dificuldades significativas no tratamento do termo de transporte, por distintas razões. Enquanto a formulação clássica (MECC), que usa a solução fundamental advectivo-difusiva, é limitada para casos de campos de velocidade variável, a formulação de dupla reciprocidade (MECDR) apresenta problemas de precisão, sendo incapaz de produzir resultados satisfatórios, mesmo em problemas com números Peclét apenas moderados. Este trabalho aplica a recente técnica de integração direta regularizada com funções de base radial (MECIDR) para modelar o termo advectivo, que expõe, por sua vez, uma boa precisão em problemas com efeitos de advecção significativos em comparação com soluções de analíticas. Tais inferências sistêmicas sobre o comportamento da formulação são evidenciadas em relação aos parâmetros de malha, durante análises paramétricas com incremento gradual dos efeitos advectivos.

Palavras-chave. Integração Direta, Problemas Advectivos-Difusivos, Processo de Regularização, Método de Elementos de Contorno

1 Introdução

Os modelos advectivo-difusivos estão largamente presentes em problemas de grande importância para a engenharia. Neste contexto o tratamento de problemas com efeitos significativos da advecção via método de elementos de contorno vem exibindo avanços consistentes. Os estudos mais direcionados iniciaram-se ainda na década de 80 com pesquisas utilizando a formulação clássica do método, tal como em [1]. Esta formulação clássica do MEC responde com solidez a situações de forte advecção, entretanto limita-se a campos de velocidade constante, por conta da complexidade atrelada à solução fundamental demandada, vide [2]. A formulação de dupla reciprocidade (MECDR), por sua vez, não

¹vitor.pinheiro1987@gmail.com

²carlosloeffler@bol.com.br

³natan.sian@gmail.com

encontra-se restrita a campos de velocidade mais simples como demonstrado em [4] no caso de geometrias simples e com ausência de quinas, todavia é restrito a baixos números de Peclét, onde o método já apresenta instabilidades, como pode ser apreciado em [3]. A mais recente formulação baseada em integração direta (MECID), já apresentou excelentes resultados em problemas de Poisson e Helmholtz, conforme [5], e portanto há uma demanda clara por uma investigação sequencial de sua performance em problemas advectivos-difusivos. Neste artigo a formulação de integração direta engloba um artifício matemático para o tratamento de singularidade denominado de processo de regularização. O procedimento gerou bons resultados a nível de estado da arte em problemas relevantes de engenharia, como consolidado em [6].

2 Formulação Numérica

A origem matemática dos problemas advectivo-difusivos pode ser unificada em um problema mecânico generalizado pela hipótese do contínuo, e portanto sua equação governante pode advir dos princípios básicos de conservação de massa, momento linear ou mesmo conservação de energia, conforme [12]. A equação governante adimensional de energia, equação (1), é mostrada abaixo para um descrever parcialmente fenômeno convectivo correlato ao campo físico escalar u em regime permanente, onde escoo um fluido newtoniano isotrópico de forma incompressível, com campo de velocidade v_i e propriedades termo-físicas constantes, dissipação viscosa desprezível e quando desprezadas as forças de campo, em linha com [11].

$$v^*_{*j} \frac{\partial u^*}{\partial x^*_{*j}} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^*_{*j}{}^2} \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

A definição do adimensional de Peclét, que governa fisicamente a equação (1), passa pela escolha de uma velocidade característica e comprimento característico, além da difusividade térmica do fluido que escoo, em linha com [13]. Por simplicidade, as geometrias a serem testadas são domínio quadrados de arestas unitárias. Desta forma, seleciona-se um comprimento característico e difusividade do fluido, ambos unitários, e determina-se o cálculo da velocidade característica via módulo do vetor velocidade do escoamento.

Uma vez posto de forma consistente o modelo matemático é possível a apresentação da formulação numérica proposta, baseada na proposta de integração direta regularizada (MECIDR). Inicia-se tal apresentação com a equação (2), governante do problema em notação indicial e com a omissão do adimensional, por simplicidade na exposição algébrica.

$$u_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (2)$$

Multiplica-se ambos os lados na equação (2) por uma função auxiliar conveniente u^* , e integra-se em ambos os lados ao longo do domínio, gerando a sentença integral forte correlata ao modelo de governo exposta na equação (3). A formulação MECIDR utiliza a solução fundamental do problema de Laplace/Poisson, que pode ser encontrada com facilidade na literatura intrínseca ao método, tal como em [8] e [10].

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) = \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) \quad (3)$$

O tratamento da sentença integral forte dada pela equação (3), por sua vez, pode ser dividido em duas etapas. Primeiramente trata-se apenas o lado esquerdo da sentença, denominado de lado difusivo (LD). O formato integral inverso correlato a este termo encontra-se amplamente reportado na literatura, tal como em [9] e posto a seguir.

$$LD = c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi, X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi, X)d\Gamma \quad (4)$$

Em paralelo, o lado direito da equação (3) é aqui denotado como lado advectivo (LA), e a forma de seu tratamento constitui a contribuição central deste artigo. A aplicação da integração por partes, seguida pela imposição da hipótese de incompressibilidade do escoamento e alinhado ao uso conveniente do teorema da divergência conduzem a:

$$LA = \int_{\Gamma} v_i(X)n_i(X)u(X)u^*(\xi, X)d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X)u(X)u_{,i}^*(\xi, X)d\Omega \quad (5)$$

A estrutura algébrica da equação (5) é constituída por uma primeira integral de contorno já manipulada e uma integral de domínio subsequente que demanda tratamento. Para tanto, apresenta-se abaixo na equação (6) o processo de regularização, no qual soma-se e subtrai-se simultaneamente um termo de domínio semelhante a integral a ser tratada.

$$LA = \int_{\Gamma} v_i(X)n_i(X)u(X)u^*(\xi, X)d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}^*(\xi, X)u(X)d\Omega + \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}^*(\xi, X)u(\xi)d\Omega - \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}^*(\xi, X)u(\xi)d\Omega \quad (6)$$

O processo de regularização descrito anteriormente tem como foco o tratamento da singularidade intrínseca a solução fundamental utilizada, quando há coincidência entre o ponto fonte e ponto campo, como exposto de forma concisa em [6]. Evidencia-se o tratamento da singularidade ao agrupar-se a segunda e terceira integrais da equação (6).

$$LA = \int_{\Gamma} v_i(X)n_i(X)u(X)u^*(\xi, X)d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}^*(\xi, X)[u(X) - u(\xi)]d\Omega - \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}^*(\xi, X)u(\xi)d\Omega \quad (7)$$

A integral resultante formada, posicionada no segundo termo da equação (7), evidencia em seu núcleo uma subtração entre potencial do ponto fonte ξ e o potencial no ponto campo interpolante. Portanto, durante a varredura de interpolação, a coincidência entre estes pontos é automaticamente anulada pelo termo no interior na integral, evitando portanto a singularidade. De fato há tendência a melhora de desempenho da técnica MECID com a regularização, como bem exposto em [6]. Ao considerar-se agora a equação (7),

observa-se a presença de duas integrais de domínio a serem tratadas. Aquela representada pelo segundo termo, e que advém da regularização, é aproximada com a técnica de integração direta (MECID). Nesta técnica, todo o núcleo da integral de domínio é aproximado por um somatório de funções de bases radiais [7], devidamente ponderados por coeficientes a determinar, conforme estruturado pela equação (8).

$$v_i(X)u_{,i}^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] \cong \alpha_j^\xi F_j(X_j, X) \quad (8)$$

Após a aproximação por bases radiais é possível conduzir a primeira integral de domínio da equação (7) ao contorno, contanto que conheça-se sua primitiva, através de integração por partes e teorema da divergência, cujos procedimentos são mostrados com maior riqueza de detalhes em [5]. Por fim, a integral de domínio posicionada como terceiro termo da equação (7) pode também ser devidamente conduzida ao contorno com os mesmos procedimentos elencados acima. Desta forma, com todas as integrais devidamente conduzidas ao contorno é possível unir os tratamentos apresentados para os lados difusivo (LD) e advectivo (LA) no intuito de expor a formulação integral final, via equação 9.

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi, X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi, X)d\Gamma = \quad (9)$$

$$\int_{\Gamma} v_i(X)n_i(X)u(X)u^*(\xi, X)d\Gamma + \alpha_j^\xi \int_{\Gamma} n_i(X)\psi_{,i}(X_j, X)d\Gamma + u(\xi) \int_{\Gamma} v_i(X)n_i(X)u^*(\xi, X)d\Gamma$$

3 Resultados e Discussões

No intuito de quantificar o desempenho da formulação MECIDR de forma verossímil, o caso físico, mostrado na Figura 1 é submetido a três testes, onde varia-se a quantidade de pontos internos (P.I) e número de elementos no contorno (E.C).

1. Teste de Convergência I - E.C Fixado / P.I Variável
2. Teste de Convergência II - P.I Fixado / E.C Variável
3. Análise Paramétrica - E.C Fixado / 3 Níveis de P.I / Pe Variável

Também vale salientar algumas diretrizes gerais adotadas na etapa de levantamento de resultados para garantir a reprodutibilidade dos resultados numéricos aqui exibidos. Primeiramente só são contabilizados resultados em arestas que possuam valores significativos, ou seja, descartam-se arestas com valores de magnitudes respectivamente muito baixas e muito altas. Esta adoção tem alinhamento com a natureza das funções de bases radiais, que tem dificuldade para interpolar simultaneamente valores com baixa e alta magnitude [7]. É também importante colocar que os testes de convergência I e II citados a priori utilizam valor unitário do adimensional de Peclét. Por fim, quando necessário os resultados dos nós imediatamente nas quinas do contorno são retirados, pois, apresentam resultado, por vezes, altamente discrepantes em qualquer método numérico. O desempenho da formulação é quantificado através de uma métrica de erro no vigente trabalho, cuja

estrutura algébrica consiste na diferença entre o valor numérico e o valor de referência, ponderado percentualmente pelo próprio valor analítico nodal. Esta métrica por sua vez apresenta dificuldades em exibir erros próximos a quinas e também superestima os erros numéricos quando o valor analítico do nó em questão está próximo a zero.

O croqui do caso analisado segue abaixo, fisicamente regido pela equação de governo, equação (1). A geometria testada possui formato quadrado e lados unitários por simplicidade. Nas arestas horizontais são impostos fluxos nulos. A aresta esquerda tem potencial nulo prescrito, enquanto na aresta direita o fluxo é prescrito com valor unitário.

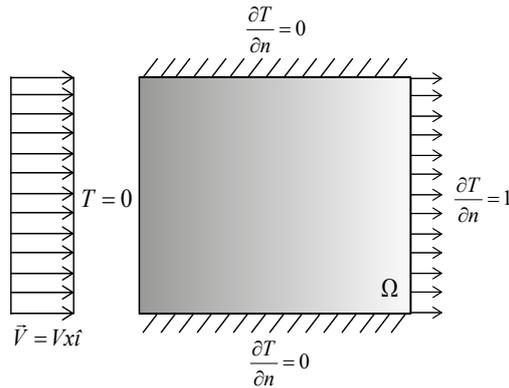


Figura 1: Croqui do Problema Físico

A solução analítica da equação (1) é dada abaixo pela equação (10), em termos de campo potencial e fluxo correlato a direção x . A discretização do problema é bidimensional, entretanto a solução analítica recai numa forma unidirecional, uma vez que os fluxos normais as arestas horizontais são nulos.

$$T(x) = \frac{e^{vx} - 1}{ve^v} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{e^{vx}}{e^v} \tag{10}$$

Inicia-se a exposição de resultados com a apresentação dos testes de convergência I e II, na Figura 2 . O gráfico da esquerda traz um refinamento fixo de 80 EC lineares no contorno, enquanto o gráfico à direita considera uma nuvem de pontos internos fixa de 625 P.I. É possível constatar convergência da formulação proposta via queda monotônica dos erros tanto em relação a quantidade de pontos internos quanto na medida que o nível de refinamento da malha de contorno é incrementado.

A seguir apresenta-se os resultados para a análise paramétrica, onde uma malha de contorno constituída por 320 EC é fixada e simula-se três níveis distintos de nuvens de pontos internos a medida que o adimensional de Peclét sofre incrementos graduais.

O gráfico da esquerda na figura 3 mostra os resultados de erros médios para o potencial calculados no contorno, cuja aresta com valores significativos neste problema é representada pela aresta direita. Este primeiro gráfico mostra uma queda consistente nos níveis de erro a medida que a nuvem de pontos internos é expandida e também exibe resultados de potencial com erros abaixo de 1% na melhor malha para um número de Peclét com valor de 30, o que caracteriza um bom desempenho da formulação. Já em relação aos potenciais calculados nos pontos internos, pode-se notar uma mesma influência positiva

6

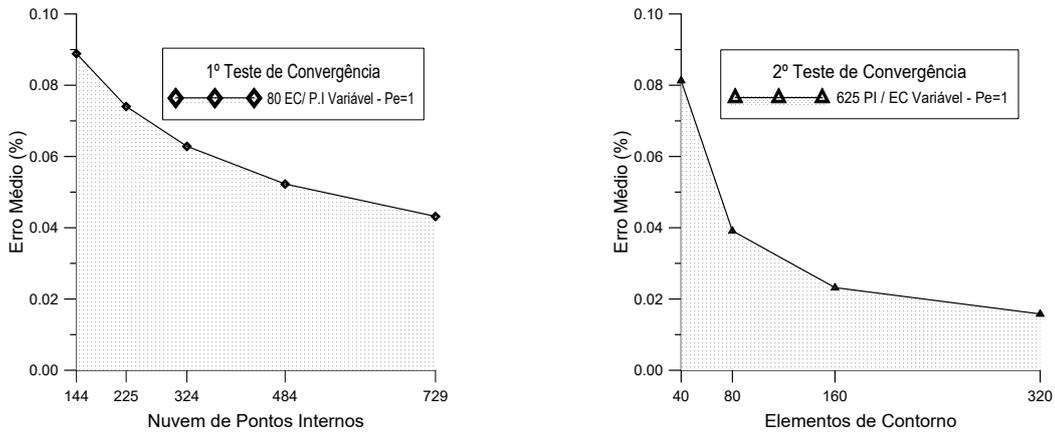


Figura 2: Análises de Convergência I e II

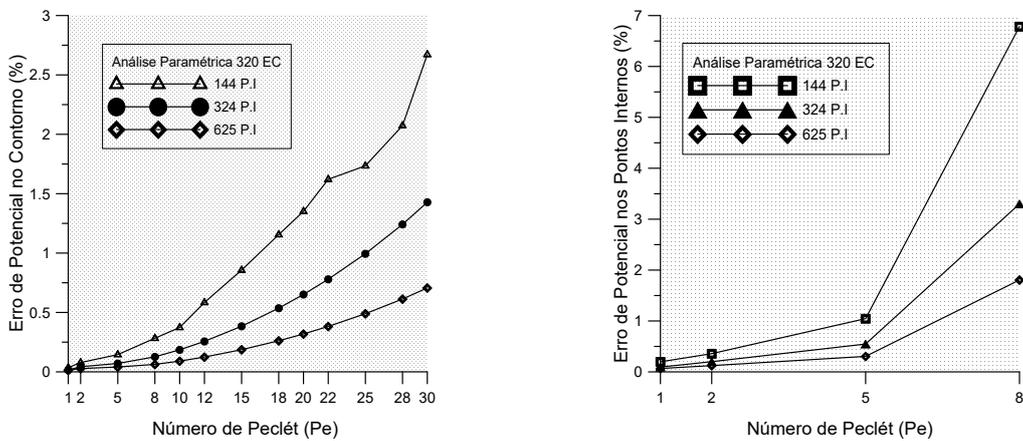


Figura 3: Análise Paramétrica - 320 EC

da quantidade de polos internos utilizada no erro, entretanto com erros razoáveis até um valor de 8 do adimensional de Peclét, com erros ainda menores que 2% para a curva de malha mais refinada com 625 P.I. Este intervalo mais restrito no intervalo do adimensional para o qual os erros permanecem mais baixos deve-se a influência das arestas com valores não-significativos sobre os potenciais numéricos determinados nos pontos internos.

4 Considerações Finais

Em linhas gerais a formulação proposta baseada em integração direta regularizada (MECIDR) apresentou um boa performance em relação a clássica formulação de dupla reciprocidade como corroborado por [3]. A convergência da formulação apresenta-se consistente em relação aos parâmetros de malha, enquanto o refinamento dos mesmos na análise paramétrica contribui para uma queda padronizada nos níveis de erro. Há indicativos sólidos de que intervalo do adimensional de Peclét no qual os níveis de erro permanecem abaixo de um valor de referência possa ser significativamente ampliado via

refinamento de malha, entretanto, há uma demanda por testes mais sistêmicos com foco no balanço entre os parâmetros de malha, tal como acerca da influência do afastamento dos nós duplos, nos níveis de erros resultantes.

Referências

- [1] Ikeuchi, M. , Sakakihara, M.,1985. *Boundary elements in steady convective diffusion problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 12 , pp.381-389.
- [2] Qiu, Z. H., Wrobel, L. C., & Power, H. ,1970. *An evaluation of boundary element schemes for convection-diffusion problems*. WIT Transactions on Modelling and Simulation.
- [3] Massaro, C.A.M., 2001. *O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos-Advectivos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo.
- [4] Wrobel, L.C. , DeFigueiredo, D.B.,1991. *A dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion problems with variable velocity fields*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 8, pp.312-319.
- [5] Loeffler, C.F., Mansur, W.J., de Melo Barcelos, H. and Bulcão, A., 2015. *Solving Helmholtz problems with the boundary element method using direct radial basis function interpolation*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 61, pp.218-225.
- [6] Loeffler, C.F. and Mansur, W.J., 2017. *A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 74, pp.14-18.
- [7] Buhmann, M.D., 2003. *Radial basis functions: theory and implementations*. Cambridge University Press.
- [8] Brebbia, C.A., 1982. *Boundary element methods in engineering*. New York, NY, USA.Springer.
- [9] Brebbia, C.A. and Dominguez, J., 1994. *Boundary elements: an introductory course*. WIT Press.
- [10] Wrobel, L.C., 2002. *The boundary element method, applications in thermo-fluids and acoustics*. John Wiley & Sons.
- [11] Schlichting, H., Gersten, K., Krause, E. and Oertel, H., 1955. *Boundary-layer theory*. New York: McGraw-hill.
- [12] Reddy, J.N., 2013. *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge University Press.
- [13] Burmeister, L.C., 1993. *Convective heat transfer*. John Wiley & Sons.