

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Comparação entre duas Técnicas do Método dos Elementos de Contorno para Solução de Problemas Escalares com Heterogeneidade Setorial

Luciano de Oliveira Castro Lara¹

Departamento de Engenharia Mecânica - DEM-UFES

Carlos Friedrich Loeffler Neto²

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM-UFES

Vitor Pancieri Pinheiro³

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM-UFES

Daniel Carvalho de Moura Candido⁴

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC-UFES

Resumo. Durante muito tempo o único efetivo do método dos elementos de contorno para solução de problemas setorialmente homogêneos se resumiu a técnica de sub-regiões, em que partes do domínio com propriedades distintas se conectavam pelas condições de continuidade e equilíbrio. Recentemente, foi proposta uma técnica alternativa baseada na computação da energia elástica contida nos setores heterogêneos junto ao equilíbrio global do sistema, tal como se faz com fontes ou forças de corpo. Neste trabalho faz-se a comparação da técnica clássica de sub-regiões com a recente técnica de superposição de domínios em aplicações de problemas elásticos lineares estacionários. Um problema teste é resolvido mostrando a boa concordância entre os dois modelos numéricos, mas ressaltando as vantagens inerentes à nova técnica

Palavras-chave. Método dos Elementos de Contorno, Equação de Navier, Problemas Elásticos com Homogeneidade Setorial.

1 Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem reconhecidamente um bom desempenho na modelagem numérica de problemas da Física Matemática e da Engenharia, nos quais o modelo matemático se apresenta em termos de operadores diferenciais auto-adjuntos [1]. Todavia, mesmo em casos outros em que o modelo não apresenta essa propriedade, o elenco de aplicações do MEC tem se ampliado devido à adição de uma série de

¹castrolara@hotmail.com

²carlosloeffler@bol.com.br

³vitor.pinheiro1987@gmail.com

⁴danielcandido89@gmail.com

recursos que geram mais flexibilidade a sua formulação. Neste contexto, o uso de funções radiais tem um papel muito significativo [2]. Contudo, ainda existem classes de problemas em que a utilização do MEC ainda é desafiadora, como nos casos dos problemas em que o meio constitutivo não é homogêneo como um todo ou, então, suas propriedades variam de forma setorialmente homogênea. Nestes casos, as técnicas de domínio, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) [3], apresentam vantagens consideráveis. No entanto, mesmo para esses casos, existe uma técnica do MEC tradicional e consistente, denominada de Sub-regiões (MECSR) em que os setores com diferentes propriedades se acoplam através das condições de continuidade e equilíbrio nos pontos nodais das interfaces [1]. A literatura especializada não registra nenhuma grande contribuição no sentido de se propor uma técnica alternativa e tampouco alterações significativas no modo operacional da MECSR. Isto não significa que o procedimento não seja sujeito a críticas; em determinadas situações complexas, mas muito importantes, a inserção de muitas interfaces produz efeitos nocivos, como perda de precisão, aumento de custo computacional e programação mais elaborada. A preocupação com a questão do tamanho das matrizes revela que as subregiões não têm sido usadas apenas para resolver problemas com propriedades constitutivas não homogêneas; também têm sido utilizadas para tratar problemas difusivo-advectivos em que as variáveis de estado mudam ao longo do domínio [4] e também problemas de propagação de ondas [5], impedindo que nós distantes influenciem o comportamento da frente de onda e daí resulte uma melhor representação resposta. Contudo, o tamanho das matrizes se amplia bastante se são consideradas muitas subregiões e de certo modo a modelagem se aproxima do que se faz numa técnica clássica de discretização do domínio. Assim, algumas estratégias foram propostas para reduzir o tamanho da matriz final quando um grande número de elementos precisa ser usado, tal como em [6]. Uma contribuição para a melhora na técnica de sub-região clássica, foi proposta em [7], em que uma matriz global é construída, alcançando bons resultados; no entanto, as equações do MEC se transformam em equações semelhantes às equações do MEF. Usando essa mesma ideia, mas examinando problemas elásticos de fratura com vários feixes de camadas, [6] apresentou uma técnica de paralelização para montar as matrizes das sub-regiões com redução no custo computacional. Este trabalho apresenta sucintamente a ideia e o modelo matemático de uma nova técnica, baseada na computação da energia elástica contida nos setores heterogêneos junto ao equilíbrio global do sistema, em que se faz uma superposição de domínios (MECSD). Esta nova opção foi testada em problemas de campo escalar estacionários em [8] com bastante êxito [9] e aqui é aplicada em problemas elásticos lineares, que são problemas de campo vetorial.

2 A Equação de Navier

Admita-se um meio bidimensional contínuo, homogêneo, elástico, linear, isotrópico, em condições estáticas, sem forças do corpo. A equação diferencial governante associada a este problema é dada pela Equação de Navier, [10]. Usando-se a notação indicial e apresentando as propriedades elásticas em termos das constantes de Lamé, λ e μ , pode ser apresentada na forma a seguir. Na equação (1), $u_i(X)$ representa o componente vetorial

do campo de deslocamento na direção "i", enquanto $X = X(x_1, x_2)$.

$$\mu u_{j,ii}(X) + (\lambda + \mu)u_{i,ij}(X) = 0 \tag{1}$$

O MEC busca transformar as equações diferenciais parciais de um modelo matemático em equações integrais envolvendo apenas integrais e valores de contorno. Para tanto, são aplicadas operações matemáticas que geram a formulação integral correlata que faz uso da solução fundamental de Kelvin, $u_j^*(\xi; X)$, encontrada em [1]. Esta função é a solução de um problema elástico correlacionado, cujo domínio é considerado infinito, onde as forças do corpo concentradas são aplicadas em pontos particulares ξ , chamados pontos fonte, atuando em cada direção dada pelo sistema de coordenadas. Assim, a seguinte equação integral pode ser escrita no domínio $\Omega(X)$ em relação a um problema homogêneo:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii}(X)u_j^*(\xi; X)d\Omega(X) + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij}(X)u_j^*(\xi; X)d\Omega(X) = 0 \tag{2}$$

A solução fundamental possui propriedades matemáticas de extrema utilidade, graças as quais é possível, via Teoria das Equações Integrais, submeter a equação (2) a um tratamento matemático adequado, transformando-a em duas integrais de contorno e uma função de ponto. No caso do ponto fonte situar-se no interior do domínio, a expressão integral de contorno, também chamada forma integral inversa, toma a forma:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} u_j(X)p_{ij}^*(\xi; X)d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} p_j(X)u_{ij}^*(\xi; X)d\Gamma(X) \tag{3}$$

Nesta última expressão, o coeficiente $c_{ij}(\xi)$ objetiva caracterizar o posicionamento do pontos fonte com relação ao domínio. Uma estrutura diádica é adotada na escrita da solução fundamental e sua derivada normal [1], na equação (3). Dessa forma, u_{ij}^* e p_{ij}^* representam deslocamentos e forças de superfície geradas na direção "j" no ponto campo X , resultado de uma carga unitária agindo na direção "i" e aplicada no ponto fonte ξ .

3 Técnica de Subregiões

Por simplicidade, o detalhamento das etapas que compõem a discretização utilizando elementos de linha são omitidas, pois encontram-se em farta literatura. Resulta então do processo de discretização clássica, seguindo as etapas usuais do MEC, o seguinte sistema matricial, composto de equações algébricas lineares:

$$[H] \{u\} - [G] \{p\} = 0 \tag{4}$$

Considerando duas sub-regiões, conforme ilustrado na Figura 1, a equação (4), em formato matricial, é gerada separadamente para cada sub-região, ou seja, na formação dos coeficientes matriciais os nós de cada sub-região somente interagem entre si. Apenas na interface se estabelecem as condições de equilíbrio e continuidade, dadas a seguir.

As sub-regiões são vinculadas usando condições de compatibilidade e equilíbrio entre nós em interfaces comuns, ou seja, os deslocamentos e forças de superfície são comuns aos nós das interfaces [1]. Com tais condições, resulta um sistema matricial integrado, em

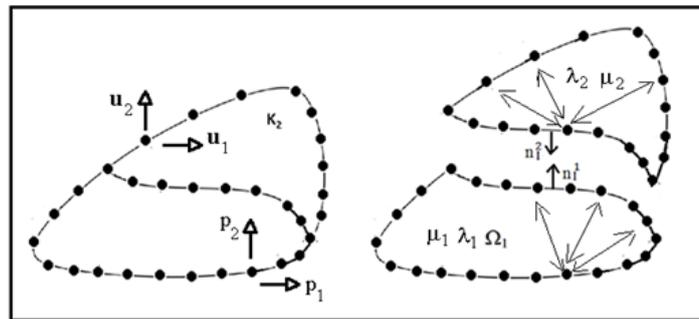


Figura 1: Domínio dividido em Sub-Regiões

que se destaca que tanto os deslocamentos quanto as forças de superfície na interface são considerados como desconhecidos. Este sistema é dado pela seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_I^1 & -G_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^2 & G_I^2 & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I \\ P_I \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Observe-se que a matriz final do sistema para a técnica de sub-região é uma matriz em banda. Contudo, os nós da interface, envolvendo como incógnitas tanto os deslocamentos quanto as forças de superfície, faz com que a dimensão da matriz aumente em razão da quantidade de sub-regiões envolvidas. Deve-se destacar que embora encerre uma ideia muito simples, ou seja, a conexão de setores com diferentes propriedades, a implementação computacional dos procedimentos mencionados é muito trabalhosa, devido à necessidade de identificação de nós comuns e nós duplos nos cantos [1].

4 Técnica da Superposição de Domínios

O conceito da técnica MECSO baseia-se em um domínio composto por duas regiões com propriedades físicas diferentes, como mostrado na Figura 2, no qual o domínio completo $\Omega(X)$ é composto da soma de Ω_e e Ω_i , com diferentes propriedades físicas, constantes dentro de cada subdomínio. Nessa formulação, ao contrário do que é feito na abordagem de sub-regiões tradicionais, um domínio completo ou envolvente com propriedades homogêneas é eleito e os outros subdomínios estão a este correlacionados.

O objetivo da técnica é computar a energia elástica contida nos subdomínios, tal como se faz com as forças de corpo. Correlaciona-se tais energias com o domínio envolvente através de coeficientes de influência ligados aos deslocamentos nos pontos fonte internos u_j^i , que precisam figurar no sistema matricial global. Em outros termos, a varredura clássica do MEC, correlacionando todos os pontos fonte gerados pela discretização, usualmente localizados apenas no contorno, agora também inclui os pontos internos que definem os subdomínios. Admita que $\mu^* = \mu^i - \mu^e$. Então, a equação integral neste caso fica:

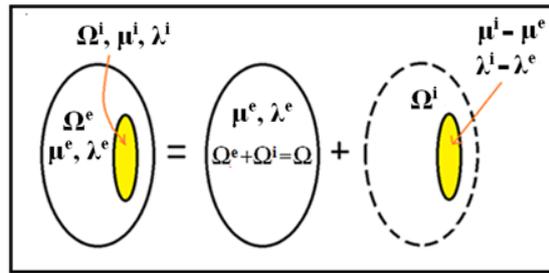


Figura 2: Croqui do Problema Físico

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} [u_j(X)p_{ij}^*(\xi; X) - p_j(X)u_{ij}^*(\xi; X)]d\Gamma(X) = -\frac{\mu^*}{\mu^e} \int_{\Gamma} u_j^i(X)p_{ij}^*(\xi; X)d\Gamma(X) \quad (6)$$

A energia elástica é representada pelo termo integral que compõe o lado direito da equação (6). O sistema matricial do MEC neste caso é dado por:

$$[H] \{u\} - [G] \{q\} = \frac{\mu^*}{\mu^e} [H^*] \{u^i\} \quad (7)$$

5 Análise de Resultados e Discussões

A performance relativa entre as duas formulações é medida via um problema físico que representa uma barragem fixada no solo e sujeita a um carregamento de pressão uniforme ilustrado na Figura 3, em que os deslocamentos nas arestas α e β são sucessivamente comparados. A escolha do perfil de carregamento tem por objetivo permitir uma análise mais efetiva da região de interface entre o solo e a base da estrutura sólida, e sua tendência de deslocamento. Este caso compõe a fase inicial de uma pesquisa em andamento sobre o acoplamento do MECSD com soluções fundamentais que permitam a solução em meios semi-infinitos sem violar as condições de regularidade [1].

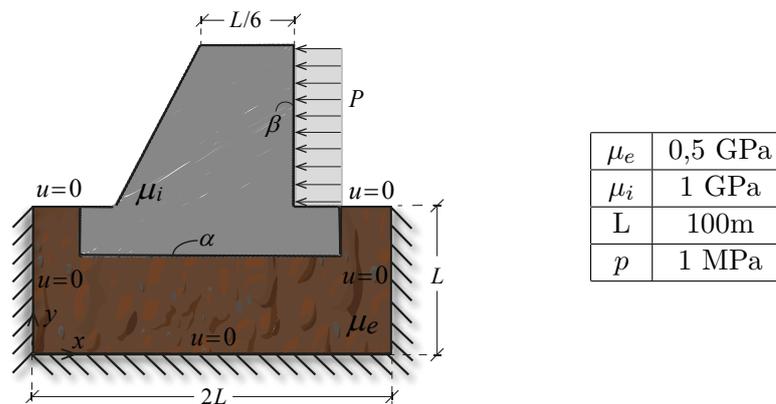


Figura 3: Croqui do Problema Físico

Os resultados são sintetizados pela figura 4, onde os campos de deslocamento determinados por cada técnica são expostos.

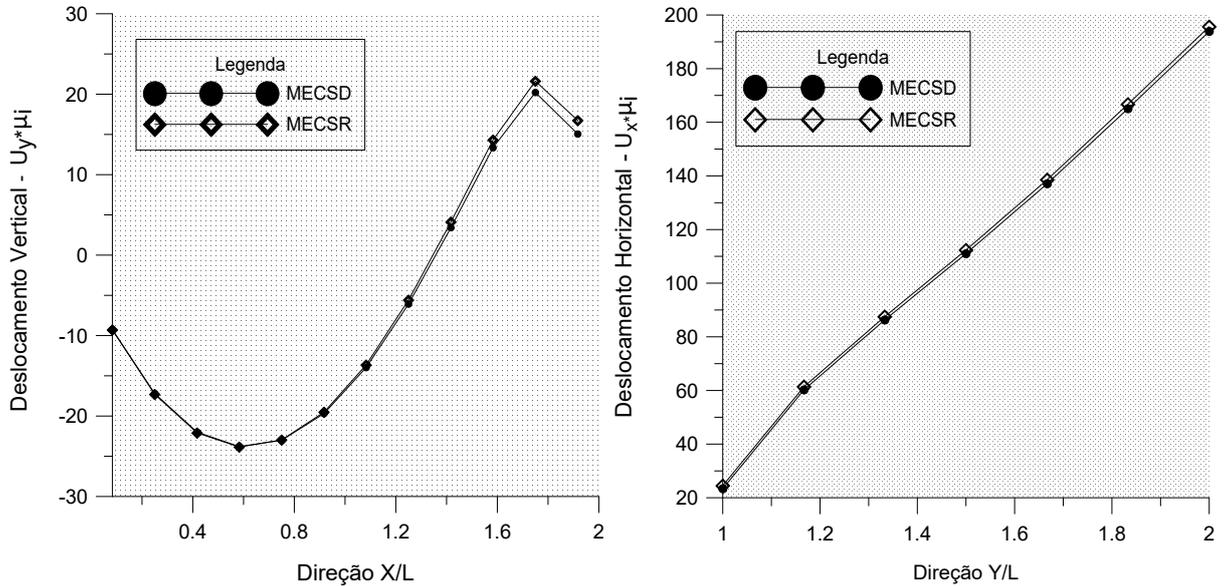


Figura 4: Campos de Deslocamento nas Arestas α e β

No gráfico à esquerda na Figura 4 têm-se o deslocamento vertical na base da barragem modelada. É possível perceber a tendência ascendente de alguns nós em detrimento a outros que possuem deslocamento no sentido de afundamento no solo. Tal comportamento pode ser explicado devido a tendência de rotação gerada pela solicitação imposta, que tende a levantar a porção da peça sólida mais próxima a região carregada. Em sequência, no gráfico da direita, tem-se a exposição do campo de deslocamentos horizontais na região de aplicação de carga. Há um crescimento nos módulos dos deslocamento ao longo da direção y , fundamentado pela variação do momento de inércia nesta direção. Quanto ao desempenho das técnica numéricas, constata-se boa aderência entre os resultados nas duas análises, o que consolida a confiabilidade da MECSD frente a técnica de sub-regiões em problemas de elasticidade desta natureza.

6 Considerações Finais

Os resultados da aplicação do MECSD consolidam-no como importante alternativa à MECSR, no contexto do Método dos Elementos de Contorno. Os testes já realizados no contexto de problemas elásticos sugerem bom potencial de extensão da técnica em problemas de Elasto-plasticidade e Mecânica da Fratura. Conceitualmente, no modelo de superposição existe um domínio circundante no qual não existem interfaces; outros subdomínios são criados pela conexão entre pontos de origem internos nos quais uma interpolação é introduzida. Comparando-se com a ideia da técnica de subregião, onde cada setor implica em uma interface com interpolação, o modelo de superposição deve produzir

melhores resultados. De fato, esse comportamento confirma-se na solução de problemas de campo escalar com soluções analíticas disponíveis, mesmo com malhas pobres e elementos constantes. [8]. Demonstra-se então que essa diferença em relação à precisão é geralmente pequena, desaparecendo com o refinamento da malha, o número de subdomínios e a ordem mais alta dos elementos de contorno. As principais vantagens do MECSD estão relacionadas à sua simplicidade matemática, sua programação computacional elementar e alta flexibilidade, permitindo que tal modelo possa ser estendido a outras aplicações importantes, nas quais a programação com subregiões se torna complexa.

Referências

- [1] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. (2012). *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer Science & Business Media.
- [2] Loeffler, C.F., Frossard, A.L.C., Lara, L.O.C.(2018). Testing complete and compact radial basis functions for solution of eigenvalue problems using the boundary element method with direct integration. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science & Mechanics*, 19, 2, 117-128.
- [3] Larson, M.G., Bengzon, F. (2010) *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. New York: Springer.
- [4] Wrobel, L. C., DeFigueiredo, D. B. (1991). A dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion problems with variable velocity fields. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(6), 312-319.
- [5] Loeffler, C. F., Mansur, W. J. (1987). Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems. *Boundary Element techniques: Applications in stress analysis and heat transfer*, 105-122.
- [6] Lu, X., Wu, W. L. (2005). A new subregion boundary element technique based on the domain decomposition method. *Engineering analysis with boundary elements*, 29(10), 944-952.
- [7] Kita, E., Kamiya, N. (1994). Subregion boundary element method. *JSME International Journal. Ser. A, Mechanics and Material Engineering*, 37(4), 366-372.
- [8] Loeffler, C. F., Mansur, W. J. (2016). Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 71, 169-173.
- [9] Loeffler, C. F. Barbosa, J. P., Barcelos, H. M. (2018) Performance of BEM Superposition Technique for Solving Sectorially Heterogeneous Laplace's Problems with Non-regular Geometry. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 93, 105-111.
- [10] Timoshenko, S., Timoshenko, S., Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company.