Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Desenvolvimento de um programa aplicativo para o ensino de grupo das permutações a deficientes visuais

Luiz Antonio Leandro Franco[1]
Departamento de Comunicações, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP
Luiz César Martini[2]
Departamento de Comunicações, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP
Márcia Cristina Lemos Guimarães Franco[3]
Departamento de Matemática, Colégio de Aplicação João XXIII, UFJF, Juiz de Fora, MG
Alan Da Silva[4]
Graduado em Ciência da Computação

Resumo. Neste trabalho apresentaremos um programa aplicativo que auxilia o deficiente visual no estudo de grupos, com foco no grupo das permutações. Este aplicativo foi construído para realizar cálculos no grupo das permutações S_3. Exibiremos dois tipos de cálculos que o aplicativo realiza. No primeiro tipo de cálculo o aplicativo oferece a alternativa para o deficiente visual construir os seis elementos do grupo das permutações S_3. Já no segundo, o deficiente visual terá disponível os seis elementos do grupo S_3 e o aplicativo realiza as operações com os elementos de S_3. O deficiente visual seleciona dois elementos dentre os seis do grupo S_3 e recebe a resposta da operação entre os mesmos.

Palavras-chave. Acessibilidade, Deficiente Visual, Grupo das Permutações, Teoria de Grupos.

1 Teoria de Grupos

De acordo com [4] em álgebra abstrata, temos certos sistemas básicos, que, na história e desenvolvimento da matemática, atingiram posições de importância fundamental. Estes são em geral conjuntos com os quais podemos operar algebricamente com seus elementos, com isto queremos dizer que podemos combinar dois elementos do conjunto, em alguns casos de diversas maneiras, para obter um terceiro elemento do conjunto. Além disso, assumimos que estas operações algébricas estão sujeitas a certas regras que são enunciadas explicitamente no que denominamos axiomas ou postulados que definem o sistema.

Definição de Grupo: De acordo com [4] um conjunto arbitário S, não vazio, definimos $A(S)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações bijetoras de S em si mesmo. Para dois quaisquer elementos σ, $\tau \in A(S)$ introduzimos um produto indicado por $\sigma \circ \tau$,

[1]franco_luiz9@hotmail.com
[2]martini@decom.fee.unicamp.br
[3]mclgui@hotmail.com
[4]alansilva2005@hotmail.com

e após investigações posteriores resultou que os seguintes fatos eram verdadeiros para os elementos de $A(S)$ sujeitos a esse produto:

1. Para todos σ, $\tau \in A(S)$, temos que $\sigma \circ \tau$ também está $A(S)$. Isto é descrito dizendo que $A(S)$ é fechado com relação ao produto.

2. Para três quaisquer elementos σ, τ, $\mu \in A(S)$, $\sigma \circ (\tau \circ \mu)= (\sigma \circ \tau) \circ \mu$. Esta relação é denominada lei associativa.

3. Existe um elemento especial $\iota \in A(S)$ que satisfaz $\iota \circ \sigma = \sigma \circ \iota = \sigma$ para todo $\sigma \in A(S)$. Tal elemento é denominado elemento unidade de $A(S)$.

4. Para todo $\sigma \in A(S)$ existe um elemento, indicado por σ^{-1}, também em $A(S)$, tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \tau$. Isto é usualmente descrito, dizendo que todo elemento em $A(S)$ tem um inverso em $A(S)$.

Considerando a fonte desta definição, não é surpreendente que para todo conjunto não vazio S o conjunto $A(S)$ seja um grupo. Assim obtemos uma fonte inesgotável de grupos concretos e interessantes, se S tem três ou mais elementos, podemos encontrar elementos σ, $\tau \in A(S)$ tais que $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Isto nos permite destacar uma classe de grupos altamente particular mas muito importante, que será descrita a seguir.

Definição 1.1. *Um grupo G é dito abeliano (ou comutativo) se para todo a, $b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$.*

Outra característica natural de um grupo é o número de elementos que ele contém. Chamamos a isto a *ordem* de G e indicamos por $_\circ(G)$. Este número é, evidentemente, mais interessante quando G é finito, assim dizemos que G é um grupo finito.

Definição 1.2. *Um subconjunto H de um grupo G é dito um subgrupo de G se, com relação ao produto em G, o próprio H forma um grupo.*

As demonstrações dos Lemas a seguir serão omitidas, para mais detalhes referimos o leitor para a referência [4], onde estão todas disponíveis.

Lema 1.1. *Um subconjunto não vazio H do grupo G é um subgrupo de G se, e somente se,*

1. *a, $b \in H$ implica que $a \cdot b \in H$.*

2. *$a \in H$ implica que $a^{-1} \in H$.*

Lema 1.2. *Se H é um subconjunto finito não vazio de um grupo G e H é fechado com relação a multiplicação, então H é um subgrupo de G.*

Definição 1.3. *Seja G um grupo, H um subgrupo de G; para $a, b \in G$ dizemos que a é congruente b mod H indicando por $a \equiv b$ mod H se $ab^{-1} \in H$.*

Lema 1.3. *A relação $a \equiv b$ mod H é uma relação de equivalência.*

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0267

Definição 1.4. *Se H é um subgrupo de G, $a \in G$, então $Ha = \{ha|h \in H\}$, Ha é denominada classe lateral à direita de H em G*

Lema 1.4. *Para todo $a \in G$,*

$$Ha = \{a \equiv xmodH\}$$

Quando os grupos surgiram pela primeira vez em matemática, eles provinham de alguma fonte específica e de maneira bem concreta. Muito frequentemente, isto se dava na forma de um conjunto de transformações de algum objeto matemático particular. Na realidade, a maioria dos grupos finitos apareceu como grupos de permutações, isto é, como subgrupos de S_n ($S_n = A(S)$ quando S é um conjunto finito com n elementos). O matemático inglês Cayley foi o primeiro a observar que todo grupo pode ser considerado como um subgrupo de $A(S)$ para algum S.

Teorema 1.1. *(Cayley). Todo grupo é isomorfo a um subgrupo de $A(S)$ para um S conveniente.*

Seja $D_n \subset S_n$ o subconjunto das permutações dos vértices de um polígono regular de n lados correspondentes às simetrias deste polígono. Então D_n é um subgrupo de S_n, chamado de **grupo diedral**. Ele é composto por $2n$ elementos, n rotações e n reflexões.

Quando construímos polígonos regulares, podemos ordenar os seus vértices, para formar uma espécie de referência. Seja um polígono regular de ordem n, ao considerarmos apenas as diversas configurações que não alteram o formato do polígono - modificando, portanto, somente as posições de seus vértices - temos o conjunto diedral de ordem n (representado por D_n). As possíveis configurações de um quadrado são: id (mantê-lo como está), r_1 (rotação de 90^o à direita), r_2 (rotação de 180^o à direita), r_3 (rotação de 270^o à direita), f_v (Reflexão Vertical), f_h (Reflexão Horizontal), f_d (Reflexão Diagonal) e f_c (Reflexão Contra-Diagonal).

Estabelecendo a operação sobre este conjunto "$*$", definida por: $a, b \in D_n, a * b = c$, onde c é a configuração obtida após executar o movimento a e em seguida o movimento b. A partir da operação entre quaisquer elementos de D_4, é possível verificar que o resultado também é um elemento de D_4. Como D_4 se trata de um conjunto finito, é perfeitamente possível construir uma tabela com os resultados da operação entre quaisquer dois de seus elementos. Os elementos id, r_1, r_2 e r_3 formam um subgrupo de D_4.

Grupo das permutações: Seja o conjunto $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, uma permutação em U, é uma função $f : U \to U$, tal que f é bijetora. O conjunto de todas as permutações em U é chamado de conjunto das permutações de n elementos. Uma permutação pode ser representada de forma matricial, onde

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

siginifica que $f(1) = 1, f(2) = 3$ e $f(3) = 2$. Assim, o conjunto das permutações de n elementos, para $n = 3$, consiste nos elementos:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerando o conjunto descrito acima e a composição de funções, temos um par ordenado que satisfaz as propriedades de um grupo, pois, a composição de funções é sempre associativa, existe um elemento neutro (no caso, P_1) e todas as funções são bijetoras, e portanto, inversíveis (todos os elementos possuem um simétrico). O mesmo argumento pode ser usado para provar que, para qualquer n positivo, o conjunto das permutações de n elementos forma grupo, em relação à composição de funções.

Definição 1.5. *Uma permutação $\theta \in S_n$ é dita uma permutação par se ela pode ser representada como um produto de um número par de transposições.*

Denominamos uma permutação ímpar se ela não é uma permutação par. A regra para combinar permutações pares e ímpares é a mesma para combinar números pares e ímpares por meio da adição, isto não é coincidência uma vez que esta regra é usada para estabelecer os seguintes fatos:

1. O produto de duas permutações pares é uma permutação par.
2. O produto de uma permutação par por uma ímpar é ímpar (a recíproca é verdadeira).
3. O produto de duas permutações ímpares é uma permutação par.

2 Aplicativos Desenvolvidos Para Deficientes Visuais

Dentre os aplicativos existentes podemos destacar o sistema DOSVOX [1], sendo um aplicativo para computadores que se comunica com o usuário através de síntese de voz, facilitando atividades como trabalho e estudo. O aplicativo MATVOX [6] e o MATVOX-02 [8], permite ao deficiente visual desenvolver algoritmos e aplicativos matemáticos tais como: funções matemáticas, constantes físicas, conversão de unidades, contém espaços de memória para armazenar dados, cálculo de números complexos, matrizes e equações polinomiais.

Em 2011 foi desenvolvida uma calculadora financeira a FINANVOX [2] baseada na na calculadora financeira HP12C, tendo como principais características os cálculos financeiros envolvendo juros compostos, taxas de retorno, amortização, cálculos de valores de prestações, entre outros. Posteriormente, em 2014 foi desenvolvido o programa GEOMETRIC VOICE [3], que tem por finalidade a criação e impressão de desenhos geométricos, facilitando a impressão das formas geométricas em Braille e em relevos, além de uma impressão comum em tinta para pessoas sem deficiência visual.

Recentemente, foi desenvolvido MatGrafvoice [5], que permite ao usuário um tratamento para funções matemáticas, assim como a sua visualização tátil através de uma impressora Braille. No trabalho [7] é descrito um programa aplicativo LATEXVOICE que permite ao usuário com deficiência visual a leitura, a criação, a edição e a compilação de arquivos em látex.

3 Desenvolvimento do Aplicativo

O aplicativo foi desenvolvido com a finalidade de ensinar teoria de grupos para deficientes visuais. O software foi construido na linguagem Object Pascal com o ambiente Embarcadero, o Delphi. Para o reconhecimento de texto em fala utilizamos a tecnologia da Microsoft conhecida como SpVoice Speak. A tecnologia possui interface de acesso realizado por funções onde a entrada é um texto, podendo o deficiente visual pré-configurar a saída (a taxa de velocidade da fala e o volume da voz) no sistema operacional. A tecnologia inicia a fala a partir de um texto passado através de função desenvolvida para se adequar ao software. O programa precisa realizar a chamada da função a partir de um objeto criado para obter a resposta em forma de fala.

Embarcadero - Delphi é uma empresa mãe de marcas globais de produtividade de software B2B cujas soluções permitem que usuários técnicos façam mais com menos e com mais rapidez. As marcas englobam três divisões - ferramentas de bancos de dados, ferramentas de desenvolvedores e ferramentas de gestão de teste. O Delphi é a ferramenta de desenvolvimento utilizada para gerar programas executáveis através da linguagem de programação Object Pascal.

Neste aplicativo estamos trabalhando com um grupo das permutações S_3, para identificarmos o número de elementos de S_3 basta usarmos a fórmula $2n$, assim encontramos como resultado seis elementos neste grupo. Uma das funções do aplicativo é propiciar a oportunidade do defeiciente visual encontrar estes seis elementos como mostra a Figura 1. Nesta etapa do aplicativo o deficiente visual faz a permutação do $1, 2, 3$ até que ele forme os seis elementos do grupo das permutações S_3.

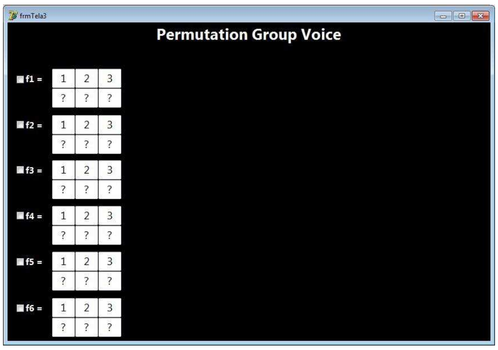

Figura 1: Formação dos Elementos de S_3.

Uma das outras funções do aplicativo é o cálculo da operação entre os elementos de S_3. Como podemos visualizar na Figura 2, o deficiente visual terá os seis elementos do grupo das permutações S_3 já disponíveis para que ele possa operar com eles. Ele escolherá dois elementos para que seja realizada a operação. Após o cálculo o programa retornará com o resultado da operação. Com este aplicativo o deficiente visual tem a possibilidade de operar com todos os elementos do grupo das permutações S_3. Com os resultados das operações entre os elementos do grupo S_3 o deficiente visual poderá entender as quatros propriedades fundamentais de grupo e consequentemente formar o conceito de grupo.

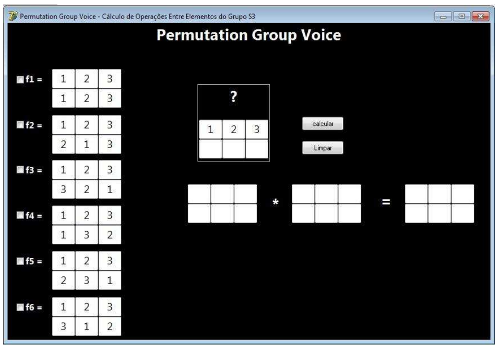

Figura 2: Operação dos Elementos de S_3.

4 Conclusões

Com o uso deste aplicativo o deficiente visual tem a possibilidade de conhecer a teoria de grupos. Este aplicativo é um novo aliado do deficiente visual para que ele possa estudar e aprofundar seus conhecimento em matemática. Com isso o deficiente visual tem a possibilidade de encontrar os elementos do grupos de permutações S_3 e posteriormente realizar a operação entre eles.

Agradecimentos

Nossos agradecimentos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes pelo apoio financeiro.

Referências

[1] J. A. S. Borges, DOSVOX - Um novo acesso dos cegos a cultura e ao trabalho, *Revista Benjamin Constant*, 3:24–29, 1986.

[2] P. H. M. Campoverde, Calculadora Financeira FINANVOX: Ferramenta de Apoio ao Deficiente Visual no Campo da Matemática Financeira, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2012.

[3] C. M. Chaparro, GEOMETRIC VOICE: Interação dos Deficientes Visuais com o Tratamento de Figuras Geométricas e sua Visualização Tátil através de uma Impressora Braille, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2014.

[4] I. N. Herstein. Topics in Algebra. John Wiley and Sons Ltd, 1975. ISBN-13: 978-0471002581.

[5] J. A. S. L. Quiñonez, MatGrafvoice: sistema de tratamento matemático e visualização tátil de funções matemáticas através de uma impressora Braille, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2015.

[6] J. M. P. Sanmiguel, Desenvolvimento de um Programa Aplicativo de Uso para Deficientes Visuais que Proporciona a Implementação de Cálculo de Formas Matemáticas num Editor de Texto, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2010.

[7] J. A. S. Sanmiguel, L. C. Martini, LatexVoice: Application based on Latex to generate documents designed for visually impaired users, *International Journal of Artificial Intelligence - IJAI*, 2:1–4, 2015.

[8] H. M. Silveira, MATVOX-02: extensão de recursos e planos de avaliação de um aplicativo matemático programável para deficientes visuais, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2012.

