

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Acoplamento Geomecânico em Meios Porosos com Dupla Porosidade e Permeabilidade Usando *Stress Split*

Aldemir Cirilo da Silva¹

Centro de Tecnologia e Geociência, Departamento de Engenharia Civil, UFPE, Recife, PE
Leonardo J. do Nascimento Guimarães²

Centro de Tecnologia e Geociência, Departamento de Engenharia Civil, UFPE, Recife, PE
Jonathan da Cunha Teixeira³

Centro de Tecnologia e Geociência, Departamento de Engenharia Civil, UFPE, Recife, PE

Resumo. Neste trabalho de pesquisa propomos uma modelagem do acoplamento geomecânico para meios porosos contendo dupla porosidade e permeabilidade. As equações de balanços de massa do sólido, de massa do fluido e do momento linear são derivadas com o intuito de obter o modelo matemático para meio poroso fraturado, onde posteriormente discretizamos esse modelo via método dos elementos finitos. Diferentemente do que já foram proposto na literatura, neste trabalho propomos o desacoplamento da parte mecânica da de fluxo utilizando a técnica do *Stress Split*. As soluções numéricas do modelo matemático obtido são comparadas com as soluções analíticas do problema de consolidação unidimensional, com intuito de validar a formulação numérica desse modelo matemático.

Palavras-chave. Dupla Porosidade, Dupla Permeabilidade, Meios Porosos, Acoplamento Geomecânico, *Stress Split*

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos uma modelagem acoplada hidro-mecânica de reservatórios fraturados representados por meios de dupla porosidade e dupla permeabilidade, onde a matriz e a fratura são tratados como meios contínuos distintos. Porosidade, pressão do fluido, permeabilidade e outras variáveis são consideradas separadamente para cada meio. Nesse modelo conceitual, o problema de fluxo tem duas variáveis globais, que são as pressões de fluido associadas a cada meio. O acoplamento entre os dois meios porosos se dá através de uma função de transferência de massa de fluido. O modelo matemático é obtido utilizando as equações de balanços de massa do sólido, de massa do fluido e do momento linear. Com o modelo matemático desenvolvido, discretizamos através do método dos elementos finitos programado em fortran no simulador geomecânico CODE_BRIGHT (*Coupled Deformation Brine Gas and Heat Transport*) [7]. Com o modelo, utilizamos a solução analítica do problema de Terzaghi para validar o modelo proposto.

¹aldemircirilo@yahoo.com.br

²leonardo@ufpe.br

³jonathan@lmcg.ufpe.br

2 Equação de Balanço de Massa do Sólido

A equação de balanço de massa do sólido para os dois meios (matriz rochosa e fratura) pode ser expressada da seguinte maneira [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1 - \phi)) + \nabla \cdot (\rho_s(1 - \phi)\mathbf{\dot{u}}) = 0 \quad (1)$$

onde ρ_s é a densidade do sólido, ϕ é a porosidade total, $\mathbf{\dot{u}}$ é o vetor de velocidade do sólido.

Aplicando a definição de derivada material em relação a velocidade do sólido na equação (1), obtemos:

$$\frac{D(\phi)}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v \quad (2)$$

onde $\dot{\epsilon}_v = \nabla \cdot \mathbf{\dot{u}}$ é o incremento da taxa de deformação volumétrica no meio poroso.

Para obtermos a equação do balanço de massa do sólido para cada meio poroso (matriz e fratura), precisamos derivar a equação (15).a) (ver Apêndice A), em relação ao tempo e substituí-la na equação (2). Daí temos:

- Meio 1 ou matriz:

$$\frac{D(\phi_1)}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v - \frac{D(\phi_2)}{Dt} \quad (3)$$

- Meio 2 ou fratura:

$$\frac{D(\phi_2)}{Dt} = \frac{(1 - \phi)}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt} + (1 - \phi)\dot{\epsilon}_v - \frac{D(\phi_1)}{Dt} \quad (4)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as porosidades da matriz e fratura, respectivamente.

Agora precisamos calcular o primeiro termo, $\frac{1}{\rho_s} \frac{D\rho_s}{Dt}$ que é a compressibilidade do sólido, e os terceiros termos, $\frac{D(\phi_2)}{Dt}$ e $\frac{D(\phi_1)}{Dt}$, das equações (3) e (4). Além do segundo termo, $\dot{\epsilon}_v$ que é a taxa de deformação volumétrica (ver Apêndice A), para obter a expressão geral da equação do balanço de massa do sólido ou evolução das porosidades para cada meio poroso. Dadas pelas equações abaixo:

- Meio 1:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_1}{Dt} &= \left((1 - \phi_2) \frac{\alpha - \phi}{K_1} - \frac{\phi_1 \phi_2}{K_f} + \frac{\alpha_1 (\alpha(1 - \phi_2) - \phi_1)}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left((1 - \phi_2) \frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{(1 - \phi_2)\phi_2}{K_f} + \frac{\alpha_2 (\alpha(1 - \phi_2) - \phi_1)}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \\ &+ \left(\frac{\alpha(1 - \phi_2) - \phi_1}{K_t} \right) \frac{D\bar{p}}{Dt} \end{aligned} \quad (5)$$

- Meio 2:

$$\begin{aligned} \frac{D\phi_2}{Dt} &= \left((1 - \phi_1) \frac{\alpha - \phi}{K_2} - \frac{\phi_2 \phi_1}{K_f} + \frac{\alpha_2 (\alpha(1 - \phi_1) - \phi_2)}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \\ &+ \left((1 - \phi_1) \frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{(1 - \phi_1) \phi_1}{K_f} + \frac{\alpha_1 (\alpha(1 - \phi_1) - \phi_2)}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} \\ &+ \left(\frac{\alpha(1 - \phi_1) - \phi_2}{K_t} \right) \frac{D\bar{p}}{Dt} \end{aligned} \quad (6)$$

onde $\alpha_1 = 1 - \frac{K_t}{K_s}$, $\alpha_2 = 1 - \frac{K_t}{K_{ns}}$ e $\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ são os alfas de Biot's [4, 5], do meio 2 e do meio poroso total [4, 5], respectivamente, K_f , $K_1 = K_s$, $K_2 = K_n$ e K_t são os módulos volumétricos do fluido, da matriz, da fratura [6] e do esqueleto sólido ou material drenado, respectivamente [4, 5] e s é o espaçamento da fratura. Já p_1 e p_2 são as pressões de fluido da matriz e da fratura e \bar{p} é a tensão média total.

3 Equação de Balanço de Massa do Fluido

Admitindo um meio poroso saturado, deformável, isortérmico, fluxo monofásico, fluido levemente compressível e sólido compressível. Desprezando o termo não-advectivo, assumindo o termo de fonte/sumidouro nulo e considerando o conceito de dupla porosidade, o balanço de massa de líquido para o meio poroso i pode ser expressado como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \phi_i) + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i + \rho_i \phi_i \dot{\mathbf{u}}) + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

onde ρ_i é a densidade de líquido, ϕ_i é a porosidade, \mathbf{q}_i é o fluxo de Darcy no meio i e Γ é a função de transferência de massa de Warren e Root [10] entre os dois meios (matriz e fratura).

Aplicando a definição de derivada material na equação acima obtemos:

$$\phi_i \frac{D\rho_i}{Dt} + \rho_i \frac{D\phi_i}{Dt} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{q}_i) + \rho_i \phi_i \dot{\epsilon}_v + (-1)^{i+1} \Gamma = 0 \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

Agora substituindo o segundo termo da equação (8), que é evolução da porosidade, pelas equações (5) e (6) e utilizando a equação de estado do líquido para cada meio poroso, a Lei de Darcy, generalizada para cada meio poroso, a equação da função de transferência de massa [10] entre os meios na equação (8) e além disso, negligenciando os termos convectivos e admitindo o fato que as distribuições das variáveis no espaço não mudam drasticamente, encontramos a equação do balanço de massa do fluido para cada meio poroso, matriz e fratura:

- Meio 1:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_2) &\left[\left(\frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\phi_1}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_1}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \left(\frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\phi_2}{K_f} + \frac{\alpha \alpha_2}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha}{K_t} \frac{D\bar{p}}{Dt} \right] - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_1}{\mu} (\nabla p_1 - \rho_1 \mathbf{g}) \right) \\ &+ \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

- Meio 2:

$$(1 - \phi_1) \left[\left(\frac{\alpha - \phi}{K_2} + \frac{\phi_2}{K_f} + \frac{\alpha\alpha_2}{K_t} \right) \frac{Dp_2}{Dt} + \left(\frac{\alpha - \phi}{K_1} + \frac{\phi_1}{K_f} + \frac{\alpha\alpha_1}{K_t} \right) \frac{Dp_1}{Dt} + \frac{\alpha}{K_t} \frac{D\bar{p}}{Dt} \right] - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_2}{\mu} (\nabla p_2 - \rho_2 \mathbf{g}) \right) - \frac{\beta k_{11}}{\mu} (p_1 - p_2) = 0 \quad (10)$$

onde $\beta = \frac{4n(n+2)}{s^2}$ é um coeficiente da função de transferência de massa [10] entre os meios, n é o conjunto de fraturas normais, k_{11} é a componente do tensor de permeabilidade intrínseca da matriz, ρ_1 e ρ_2 são as densidades do fluido no meio 1 e 2 e \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são os tensores de permeabilidade intrínseca para o meio 1 e 2, respectivamente.

4 Equação de Balanço do Momento Linear (Equilíbrio)

O balanço de momento para os meios porosos reduz a equação de Equilíbrio para tensão total, sendo os termos inercias e aceleração negligenciados:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad (11)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões totais e \mathbf{b} é o vetor de força de corpo.

Uma possível decomposição da deformação [8, 12] é:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (12)$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}$ é a deformação total, na qual está compreendida a deformação elástica.

O equilíbrio de tensões totais está para todo o meio, enquanto que as deformações irá se decompor em contribuições diferentes para cada meio e isso depende do modelo constitutivo mecânico adotado.

Para obter o balanço de massa do momento linear, basta utilizar a relação entre as mudanças na tensão total $\boldsymbol{\sigma}$ e tensão efetiva $\boldsymbol{\sigma}'$ dada por Terzaghi [9] e Biot [3]. Para meios porosos de dupla porosidade e permeabilidade, a tensão total pode ser expressada como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha_1 \mathbf{I}p_1 - \alpha_2 \mathbf{I}p_2. \quad (13)$$

Utilizando as relações constitutivas da tensão efetiva com a deformação para o sistema de meio poroso fraturado na equação (13) e substituindo a mesma na equação (11), obtemos a equação do balanço de massa do momento linear.

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\mathbf{C}\alpha_1 \mathbf{I}p_1 - \mathbf{D}\mathbf{C}\alpha_2 \mathbf{I}p_2) + \mathbf{b} = 0 \quad (14)$$

5 Resultado

Para validação do modelo matemático, foi realizada uma comparação da solução analítica do problema de consolidação unidimensional com a solução numérica do modelo de dupla porosidade e dupla permeabilidade, discretizado utilizando método dos elementos finitos, programado em fortran no simulador geomecânico CODE_BRIGHT [7].

As soluções analíticas para a poro pressão e o deslocamento são obtidas de acordo com [11].

O domínio utilizado para obter as soluções tem uma largura de 20 m e altura de 100 m e é composta por 464 nós e 830 elementos. Os parâmetros usados são: módulo de elasticidade $E = 2500 \text{ MPa}$, razão de Poisson $\nu = 0.3$, porosidade da matriz $\phi_1 = 0.3$, permeabilidade da matriz $K_1 = 10^{-12} \text{ m}^2$, módulos volumétricos do fluido $K_f = 2.222 \times 10^3 \text{ MPa}$ e do sólido $K_s = 3.3654 \times 10^{13} \text{ MPa}$, carga aplicada $q = -1.4543 \text{ MPa}$. Para a fratura utiliza-se os mesmo valores dos parâmetros da matriz e a função de transferência de massa é nula. Desta forma, podemos fazer a comparação com a solução analítica do meio de simples porosidade. Com isso, obtemos as Figuras 1 e 2.

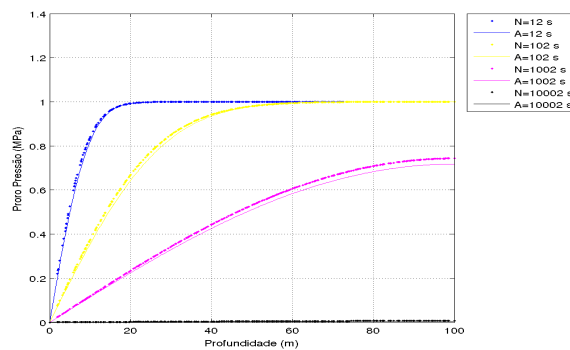


Figura 1: Solução analítica versus numérica para poro pressão.

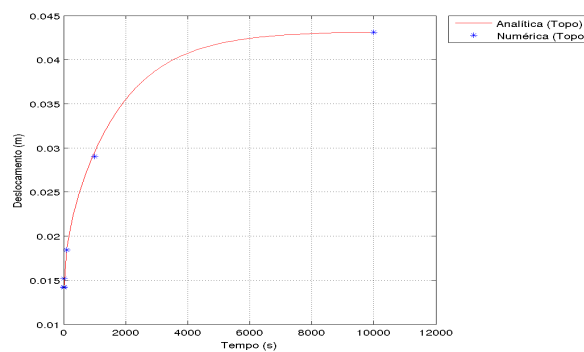


Figura 2: Solução analítica versus numérica para deslocamento.

As Figuras 1 e 2 mostram a comparação entre as soluções numéricas e analíticas para a poro pressão e o deslocamento. Podemos, observar que na Figura 1 existe uma pequena diferença na poro pressão para o tempo de 1002 segundos. Já na Figura 2 observamos que as curvas dos deslocamentos foram obtidas no topo do domínio, ou seja, $h = 100 m$.

6 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada uma modelagem matemática do acoplamento geomecânico em meios porosos com dupla porosidade e permeabilidade usando *stress split*. Obtemos as equações de balanços de massa do sólido ou evolução da porosidade, de massa do fluido para as variáveis de fluxo e do momento linear para as variáveis mecânicas. Sendo as variáveis de pressões e de porosidades obtidas para cada meio poroso, matriz e fratura. Para validação do modelo matemático obtido, o mesmo foi discretizado utilizando o método de elementos finitos, programados em fortran. Assim, conseguimos validar a formulação apresentada neste trabalho com o caso de consolidação unidimensional, onde os resultados foram bastantes significativos.

Referências

- [1] E. C. Aifantis, Introducing a multi-porous medium, *Developments in Mechanics*, 9:209–211, 1977.
- [2] E. C. Aifantis, On the problem of diffusion in solids, *Acta Mechanica*, 37:265–296, 1980.
- [3] M. A. Biot, e D. G. Willis, The elastic coefficients of the theory of consolidation, *Journal of Applied Mechanics*, 24:594–601, 1957.
- [4] P. A. Charlez. *Rock Mechanics: Theoretical Fundamentals*. Editions Technip, Paris, 1991.
- [5] R. W. Lewis, and B. A. Shrefler. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley, New York, 1998.
- [6] F. Meng, Three-Dimensional Finite Element Modeling Flow in Deformable Natural Fractured Reservoirs. Tese de Doutorado, University of Oklahoma, 1998.
- [7] S. Olivella, A. Gens, J. Carrera e E. E. Alonso, Numerical formulation for a simulator (CODE_BRIGHT) for the coupled analysis of saline media, *Engineering Computations*, 13:87–112, 1996.
- [8] M. Sanchez, S. Olivella e A. Gens, Thermo-hydro-mechanical modelling of low permeability media using a double-porosity formulation, *Mecanica Computacional*, 23:733–754, 2004.
- [9] K. Terzaghi. *Theory Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1943.

- [10] J. E. Warren, e P. J. Root, The behavior of naturally fractured reservoirs, *Soc. Pet. Eng. J.*, 228:245–255, 1963.
- [11] A. Verruijt. *Theory and Problems of Poroelasticity*. Delft University of Technology, Delft, 2013.
- [12] J. Zhang, e J. C. Roegiers, Double porosity finite element method for borehole modeling, *Rock Mech. Rock Engne.*, 38:217–242, 2005.

A Informações Complementares

A Figura 3 mostra o conceito de dupla porosidade abordado neste trabalho:

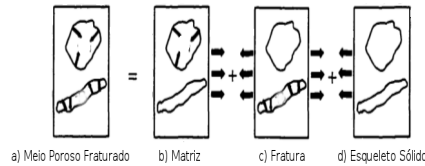


Figura 3: Modelo em meios de dupla porosidade (Modificado de [6]).

Assim, as porosidades e o volume total do meio poroso podem ser definidas como [1,2,6]:

$$a) \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad b) \quad \phi_1 = \frac{V_1}{V} \quad c) \quad \phi_2 = \frac{V_2}{V} \quad d) \quad V = V_s + V_1 + V_2 \quad (15)$$

Para obtenção da deformação volumétrica precisamos fazer a decomposição do estado de tensões ou o *stress split* do meio poroso de dupla porosidade Figura 3.

Utilizando a equação (12) podemos expressar a deformação total do meio poroso como:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (16)$$

Substituindo cada estado de deformação temos:

$$\epsilon = -\mathbf{I} \frac{p_1}{3K_s} - \mathbf{I} \frac{p_2}{3K_{ns}} + \mathbf{C} (\sigma + \mathbf{I}p_1 + \mathbf{I}p_2) \quad (17)$$

Aplicando o traço na equação (17) e fazendo uso dos princípios das tensões efetivas, resulta:

$$\epsilon_v = \frac{1}{K_t} (\bar{p} + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) \quad (18)$$

onde \bar{p} é a tensão média total.

Agora podemos expressar a taxa de deformação volumétrica, $\dot{\epsilon}_v$, em função da tensão média total como:

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{1}{K_t} \left(\frac{D\bar{p}}{Dt} + \alpha_1 \frac{Dp_1}{Dt} + \alpha_2 \frac{Dp_2}{Dt} \right) \quad (19)$$