

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Um Método *Multigrid* Aplicado às Equações de Navier-Stokes

Jean Michael Borges de Oliveira<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, Curitiba, PR

Luciano Kiyoshi Araki<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, UFPR, Curitiba, PR

Marcio Augusto Villela Pinto<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, UFPR, Curitiba, PR

**Resumo.** O presente trabalho reporta a análise de um método multigrid aplicado à solução das equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível em regime permanente. As equações que modelam o fenômeno são discretizadas através do Método dos Volumes Finitos e de esquemas de aproximação de segunda ordem em malhas uniformes com arranjo co-localizado. O método utilizado para solução dos sistemas resultante de equações é baseado no algoritmo SIMPLEC associado ao método Gauss-Seidel como solver principal. Conjuntamente com o SIMPLEC, um método multigrid FAS com ciclos-V é aplicado no modelo numérico de maneira a acelerar a convergência da solução do sistema de equações associado. Os desempenhos das versões *singlegrid* e *multigrid* do modelo numérico são comparadas através de seus respectivos tempos computacionais e de *speedups*. Os tempos e *speedups* são também comparados com outro trabalho da literatura que possui as mesmas características deste presente.

**Palavras-chave.** *Multigrid*, Navier-Stokes, ciclo-V, Volumes Finitos, SIMPLEC.

## 1 Introdução

Nas últimas três décadas, notáveis melhoras nas taxas de convergência de modelos numéricos para as equações de Navier-Stokes têm sido obtidas por pesquisadores através do uso de métodos *multigrid* em conjunto com os métodos de acoplamento pressão-velocidade tradicionais. Dentre estes, merecem destaque os trabalhos pioneiros [7], [6] e [12]. Um dos primeiros e mais importantes trabalhos a utilizar o Método dos Volumes Finitos (MVF) conjuntamente com métodos *multigrid* encontra-se em [5]. Um esquema utilizando o algoritmo *full multigrid* com aproximação completa, ou FAS-FMG (*full approximation scheme full multigrid*), juntamente com o método semi-implícito para acoplamento pressão-velocidade SIMPLE (*semi-implicit method for pressure linked equations*) é empregado. Bons resultados foram obtidos e as características esperadas dos métodos

---

<sup>1</sup>jmboliveira86@gmail.com

<sup>2</sup>lucaraki@ufpr.br

<sup>3</sup>marcio\_villela@ufpr.br

*multigrid* foram observadas, como o aumento quase linear dos tempos computacionais com o aumento do número de variáveis.

Mais recentemente, em [13], um algoritmo modificado FAS-FMG juntamente com o SIMPLE para acoplamento pressão-velocidade é apresentado. Os *speedups*<sup>4</sup> obtidos nesse trabalho são da ordem  $O(10^2)$  e estão entre os melhores da atualidade. Todavia, poucos são os trabalhos presentes na literatura que utilizam apenas ciclos-V (sem a implementação do FMG) na solução das equações de Navier-Stokes. Um trabalho recente que se destaca nesse sentido pode ser encontrado em [9]. As técnicas e métodos nele empregados são muito semelhantes aos empregados neste presente trabalho. Por esse motivo, este trabalho é utilizado como a principal base de comparação para os resultados aqui obtidos.

No presente trabalho, o método *multigrid* é empregado em conjunto com o método SIMPLEC (SIMPLE consistente) [3] para resolução das equações de Navier-Stokes. O problema da cavidade quadrada unitária [10] é utilizado para os testes. Resultados são obtidos para escoamentos sob diversos regimes ditados pela variação do número de Reynolds. Os resultados aqui obtidos são comparados com alguns trabalhos da literatura através dos perfis das componentes da velocidade nas linhas centrais da cavidade. Portanto, como é de praxe na literatura, a acurácia do modelo numérico é avaliada principalmente pelos valores da velocidade do fluido no vórtice principal central. Afastando-se das linhas (horizontal e vertical) centrais em direção aos cantos da cavidade, a presença de subvórtices menores e de singularidades nos cantos torna tais avaliações mais difíceis de serem realizadas e técnicas adicionais são necessárias [1].

## 2 Metodologia

Considerando um escoamento permanente bidimensional, sem trocas de calor, de um fluido incompressível, as equações das conservações das quantidades de movimento (em  $x$  e  $y$ ) e da massa, representando as equações de Navier-Stokes, podem ser escritas na forma adimensionalizada como:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

onde  $x, y$  são as coordenadas cartesianas,  $u, v$  são as componentes horizontal e vertical, respectivamente, do vetor velocidade,  $p$  é a pressão e  $\text{Re}$  é o número de Reynolds. Com relação às condições de contorno, o problema clássico da cavidade [10] considera que os valores de todas as variáveis são nulos em todos os seus contornos, exceto na tampa (contorno superior), onde a velocidade horizontal  $u$  possui valor positivo unitário.

<sup>4</sup>O *speedup* é utilizado para medição do ganho de performance (com relação a tempos de execução) de um código computacional melhorado com relação ao código original. Sua definição é dada como sendo a razão entre o tempo de execução do código original e o tempo do código modificado.

### 2.1 Modelo Numérico

Como já foi mencionado anteriormente, o método dos Volumes Finitos [4] foi utilizado para discretização do modelo matemático. As malhas utilizadas nesse trabalho são uniformes e com arranjo co-localizado, sendo os pontos nodais localizados exatamente no centro de cada volume de controle. A representação de um volume de controle e seus vizinhos, juntamente com os respectivos pontos nodais, pode ser observada na Fig. 1. Considera-se aqui que  $\Delta x = \Delta y$ .

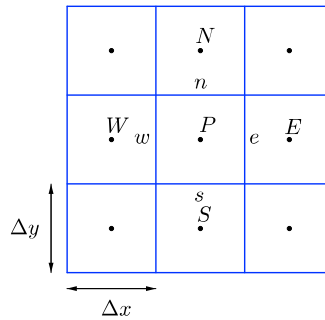


Figura 1: Volumes de controle típicos envolvendo o ponto nodal  $P$  e seus vizinhos.

Após a discretização do domínio, as equações das conservações da quantidade de movimento são integradas sobre cada volume de controle, Fig. 1. Aproximações centrais de segunda ordem são aplicadas para os fluxos difusivos e aproximações do tipo *upwind*, com correções adiadas de segunda ordem, para os termos convectivos. A referência [4] pode ser consultada para maiores informações sobre esses processos. Assim, as formas discretizadas das Eqs. (1) e (2) podem ser escritas como:

$$A_P^V u_P = \Sigma A_{nb}^V u_{nb} - \frac{p_E - p_W}{2} \Delta y + S^u \tag{4}$$

$$A_P^V v_P = \Sigma A_{nb}^V v_{nb} - \frac{p_N - p_S}{2} \Delta x + S^v \tag{5}$$

onde os índices  $nb$  recebem os valores dos pontos nodais vizinhos ao ponto  $P$ . Os coeficientes  $A^V$  são os mesmo para ambas velocidades  $u$  e  $v$  e podem ser conferidos em [4]. Os termos-fonte  $S^u$  e  $S^v$  contêm os termos provenientes das correções adiadas.

No método SIMPLEC, a equação da continuidade, Eq. (3), é transformada em uma equação para correção de pressão  $p'$ . As velocidades e as correções de pressão estão relacionadas pelas seguintes expressões:

$$u_P = u_P^* - d_u \frac{(p'_E - p'_W)}{2} \tag{6}$$

$$v_P = v_P^* - d_v \frac{(p'_N - p'_S)}{2} \tag{7}$$

onde  $d_u = \Delta y / (A_P^V - A_{nb}^V)$  e  $d_v = \Delta v / (A_P^V - A_{nb}^V)$  são chamados de coeficientes do SIMPLEC. As velocidades indicadas por \* são soluções das conservações da quantidade de movimento, que ainda não satisfazem a conservação da massa. Expressões similares são obtidas para as velocidades nas outras faces do volume de controle, Fig. 1. Mais detalhes podem ser encontrados em [4].

Após a integração sobre os volumes de controle da malha e da substituição das relações dadas pelas Eqs. (6) e (7), obtém-se a seguinte equação discretizada para as correções de pressão:

$$A_P^p p'_P = \Sigma A_{nb}^p p'_{nb} + S^p \tag{8}$$

onde os coeficientes  $A^p$  podem também ser encontrados em [4]. Após a solução da Eq. (8), as pressões iniciais são corrigidas através da relação  $p = p^* + p'$ . As velocidades são corrigidas através das Eqs. (6) e (7).

## 2.2 Multigrid

No presente trabalho, um método *multigrid* é empregado a partir de um ciclo-V modificado para as equações da conservação da quantidade de movimento. Os passos desse novo ciclo-V podem ser conferidos no algoritmo 1 e são explicados a seguir. Primeiramente são realizadas algumas iterações nas Eqs. (4) e (5) de maneira a produzir um campo de velocidades inicial  $u^*, v^*$ . Com este campo, os coeficientes de velocidade  $A^V$  são atualizados para serem utilizados no cálculo dos coeficientes  $d_u$  e  $d_v$  do SIMPLEC. A Eq. (5) é então resolvida através de um ciclo-V [11] encadeado. Após este ciclo, os campos de pressão e velocidade são corrigidos e então um ciclo-V é executado para resolver as equações das conservações da quantidade de movimento desta vez. Este processo é repetido até que o critério convergência seja alcançado.

**Algoritmo 1:** Ciclo-V modificado para as equações da conservação da quantidade de movimento.

Inicializar as variáveis  $u, v, p$  e  $p'$  ;

**Enquanto** tolerancia não é satisfeita

    executar algumas iterações nas Eqs. (4) e (5) e obter  $u^*$  and  $v^*$  ;

    atualizar os coeficientes  $A^V$  ;

    executar um ciclo-V para resolver a Eq (8) com um campo de velocidades fixo;

    corrigir as pressões utilizando a relação  $p = p + p'$  e as velocidades com as Eqs. (6), (7);

    executar um ciclo-V para resolver as Eqs. (4) e (5) com um campo de pressões fixo;

**Fim**

A seguir, são apresentados os componentes do *multigrid*, incluindo métodos e técnicas, bem como os parâmetros de simulação utilizadas neste trabalho:

- os operadores de restrição empregados para as variáveis e para os resíduos são, respectivamente, a média e a soma dos elementos correspondentes da malha fina [4];
- o operador bilinear de prolongação é utilizado para todas as variáveis [8];

- a razão de engrossamento de malha padrão igual a 2 é empregada [11] e o número máximo de níveis é utilizado em todos os ciclos, onde a malha mais grossa possível com dimensões  $2 \times 2$ ;
- o número máximo de iterações executadas por cada *solver* interno sempre varia entre 1 e 2;
- o laço externo (ciclo-V modificado) é iterado até que as normas de cada resíduo sejam menores que  $10^{-8}$ , o critério através do qual tal tolerância é adotada pode ser conferido em [8];
- todas as equações foram solucionadas através do *solver* Gauss-Seidel lexicográfico;
- as condições iniciais foram tomadas como sendo sempre nulas para  $u$ ,  $v$  e  $p$ .

Para maiores informações sobre todas essas técnicas, pode-se consultar [11].

### 3 Resultados

Nesse trabalho, as simulações foram realizadas em um computador com 8 GB de memória RAM e processador Intel® Core i7-4790 com 3,6 GHz de frequência, 4 núcleos e 8 MB de *cache*.

A acurácia das soluções pode ser avaliada por meio dos perfis das velocidades nas linhas centrais vertical e horizontal da cavidade, apresentados nas Figs. 2 e 3 para diferentes valores do número de Reynolds. Malhas  $512 \times 512$  são utilizadas nesses testes. Os perfis obtidos nesse trabalho são comparados com os provenientes de [10], indicados pela legenda “Marchi” (enquanto os resultados do presente trabalho são indicados apenas pelos números de Reynolds). Esse trabalho também compara seus resultados com os de [7], [2] e [1]. Assim, como se pode notar, o presente trabalho está em boa concordância com todos estes.

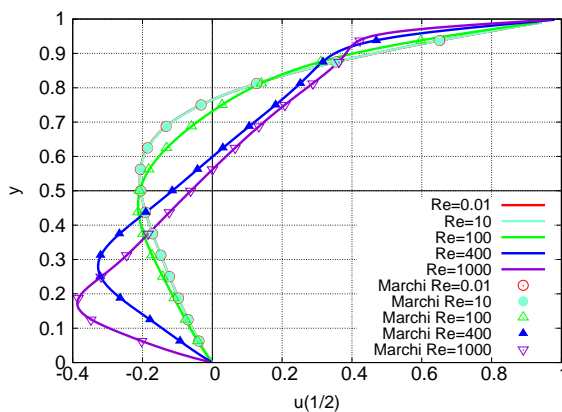


Figura 2: Comparação dos perfis da componente  $u$  na linha central vertical.

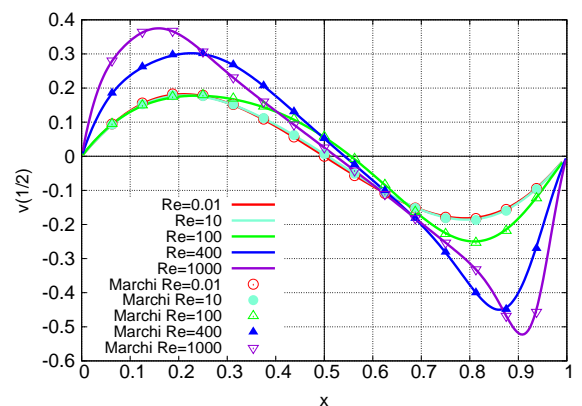


Figura 3: Comparação dos perfis da componente  $v$  na linha central horizontal.

Os decaimentos residuais das componentes das velocidades  $u$  e  $v$  das versões *singlegrid* (indicados por SG) e *multigrid* (indicados por MG) do modelo numérico podem ser comparados na Fig. (4). Uma malha com dimensões  $256 \times 256$  é utilizada nesse caso e o número de Reynolds é igual a 400. Pode-se notar que a versão *multigrid* converge com cerca de 800 iterações, contra mais de 9000 iterações necessárias à convergência da versão *singlegrid*.

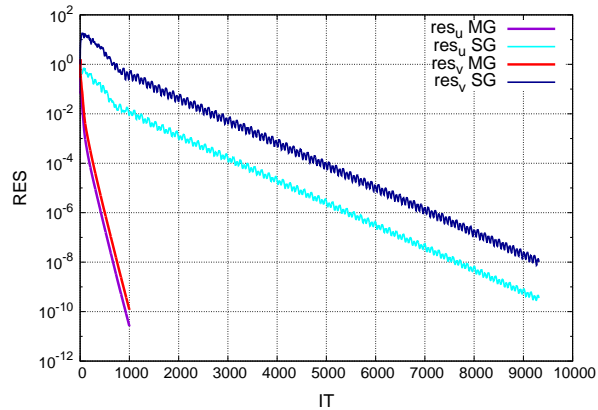


Figura 4: Decaimentos residuais (RES) com o número de iterações (IT) das versões *singlegrid* e *multigrid* do modelo numérico.

Finalmente, os tempos computacionais (em segundos) das versões *singlegrid* (SG) e *multigrid* (MG) do modelo numérico e os *speedups* (indicados por  $S$ ) são apresentados nas Tabs. 1 e 2. Pode-se notar que os *speedups* obtidos aqui são superiores aos apresentados em [9]. No melhor caso, a versão *multigrid* foi cerca de 30 vezes mais rápida que a versão *singlegrid*, apesar de apenas ciclos-V terem sido utilizados.

Tabela 1: Tempos de execução e *speedups* para alguns valores de  $Re$  em uma malha  $513 \times 513$ .

Re	SG	MG	$S$
100	2409,769	158,5	15,2
400	2549,1	124,878	20,4
1000	3092,053	134,5	23
2000	3410,481	189,415	18

Tabela 2: Tempos de execução e *speedups* para malhas com diferentes dimensões com  $Re = 1000$ .

malha	SG	MG	$S$
$129 \times 129$	16,338	2,02	8,1
$257 \times 257$	210,12	13,805	15,22
$513 \times 513$	3092,053	134,5	23
$1025 \times 1025$	36796,115	1210,762	30,4

## 4 Conclusões

Um modelo numérico para as equações de Navier-Stokes incompressíveis em regime permanente foi desenvolvido. Uma versão *multigrid* foi implementada para esse modelo

fazendo uso de um ciclo-V modificado para as equações das conservações da quantidade de movimento em  $x$  e  $y$ . No melhor dos casos, a versão *multigrid* foi cerca de 30 vezes mais rápida que a versão *singlegrid*, apesar de apenas ciclos-V terem sido utilizados. Fica evidente assim que este modelo tem potencial para atingir performances ainda melhores quando o algoritmo FMG for utilizado. Pois, segundo [11], a eficiência ótima de um método *multigrid* para problemas não-lineares é obtida através fo FMG.

## 5 Referências

- [1] O. Botella and R. Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computer & Fluids*, 27(4):421 – 433, 1998.
- [2] C. Bruneau and M. Saad. The 2d lid-driven cavity problem revisited. *Computer & Fluids*, 35(326 - 348), 2006.
- [3] V. J. P. Doormal and G. D. Raithby. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7(2):147 – 163, 1984.
- [4] J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 3 edition, 2002.
- [5] J. H. Ferziger, M. Peric, G. Scheuerer, and C. Becker. Finite volume multigrid solutions of the two-dimensional incompressible navier-stokes-equations. In *Robust Multi-Grid Methods*, volume 23 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 37–47. Vieweg & Teubner Verlag, 1989.
- [6] L. Fuchs and H. S. Zhao. Solution of three-dimensional viscous incompressible flows by a multi-grid method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4:539–555, 1984.
- [7] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- [8] S. F. T. Gonçalves. *Estudo de Parâmetros do Método Multigrid Geométrico para Equações 2D em CFD e Volumes Finitos*. Tese de doutorado, UFPR, 2013.
- [9] S. K. Kumar, S. D. Kumar, and M. Kumar. A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 3(3):336 – 354, 2009.
- [10] C. H. Marchi, R. Suero, and L. K. Araki. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 31(3), Sep 2009.
- [11] U. Trottenberg, C. Osterlee, and A. Schuller. *Multigrid*. Academic Press, New York, 2001.
- [12] S. P. Vanka. Block-implicit solution of navier-stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, 65:138–158, 1986.
- [13] J. Yan, F. Thiele, and L. Xue. A modified full multigrid algorithm for the navier-stokes equations. *Computers & Fluids*, 36(2):445–454, Feb 2007.