Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Matemática e música: uma relação harmoniosa no ensino de funções trigonométricas

Olga Harumi Saito[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Carlos Antonio Depizoli[2]
Instituto de Educação do Paraná Prof. Erasmo Pilotto, SEED, Curitiba, PR

Resumo. Apresentamos neste trabalho a música como ferramenta para a motivação do ensino de funções trigonométricas. Materiais lúdicos como simuladores interativos associados a outras disciplinas como a Física possibilitam o desenvolvimento do raciocínio lógico e habilidades para o entendimento dos conteúdos envolvidos no estudo das funções trigonométricas.

Palavras-chave. Trigonometria, Simuladores Interativos, Ondas, Som, Série de Fourier.

1 Introdução

O som encanta o ser humano desde a antiguidade e, através de batidas entre objetos ou da própria voz, a música pode ser constituída.

Segundo Abdounur [1], desde os tempos mais remotos é possível observar a relação entre a Matemática e a música como na flauta apresentada na Figura 1(a), com idade entre 43000 e 82000 anos. A Figura 1(b) destaca a flauta feita de osso de abutre. Em ambas, pela distância entre os furos, percebeu-se que há uma relação matemática envolvida.

(a) (b)

Figura 1: (a) Flauta de osso de urso [1]; (b) flauta de osso de abutre [6].

---

[1]harumi@utfpr.edu.br
[2]carlos.depizoli@gmail.com

E por que falar de música enquanto se ensina um conteúdo matemático?

Apesar das pessoas apreciarem a música muitas vezes não percebem que por trás dos sons e de suas combinações existe uma teoria matemática que define regras para uma relação harmoniosa, ou seja, uma música agradável para quem ouve.

A música permite promover a interdisciplinaridade que deve estar presente nas salas de aula. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [2] destacam a construção de um projeto curricular interdisciplinar para a melhoria do ensino e a música pode ser um dos instrumentos a constribuir para esse fim .

Ainda, de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica (LDB) [7], a música utilizada na prática disciplinar promove a facilitação da aprendizagem e a socialização.

2 A História da Matemática e da Música

Os primeiros registros da relação entre a Matemática e a música surgiram no século VI a.C. através do experimento realizado por Pitágoras no monocórdio. Ele descreveu como tornar os sons agradáveis ao ouvido humano. [3]

Na Idade Média foram apresentados estudos mais complexos para promover alguns ajustes na escala apresentada por Pitágoras. Já no Renascimento houve um avanço e a coplexificação musical, não baseadas apenas nos números racionais como mostrou Pitágoras mas também em números irracionais. Um dos destaques nesse período foi Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que, com suas pesquisas, tornou possível a compreensão do som e do timbre. [1]

No século XVIII, um dos principais objetivos era calcular uma altura fundamental e seus harmônicos. D′Alambert mostrou que um som era a superposição de diversos harmônicos, ou seja, a superposição de seus modos simples com distintas amplitudes e, para isso ele utilizou o Teorema de Fourier que se transformou no fundamento para análise de harmônicos, consonância/dissonância, batimentos e outros. Tal teorema ficou conhecido como a Lei de Ohm da Acústica. [5]

3 A Música e a Série de Fourier

Segundo Ramalho [10] as ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais associadas a uma variação de pressão ou seja compressões e rarefações. As ondas mecânicas podem ser classificadas, de acordo com a direção da vibração, em transversais, Figura 3(a) e longitudinais Figura 3(b).

Para se obter o timbre graficamente soma-se as ondas senoidais (ou cossenoidais) que representam os sons puros, chamados de harmônicos. A soma das ondas senoidais (ou cossenoidais) é obtida através da Série de Fourier.

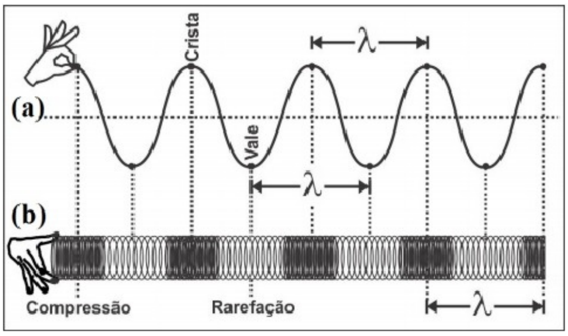


Figura 2: Representação de ondas: (a) transversais; (b) ondas longitudinais. [8]

3.1 A Série de Fourier

Em Zill [11], uma função é considerada como uma generalização de um vetor e conceitos como produto interno e ortogonalidade podem ser estendidos às funções.

Definição 3.1. *Duas funções f_1 e f_2 são **ortogonais** em um intervalo $[a,b]$ se*

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0.$$

Definição 3.2. *Diz-se que um conjunto de funções com valores reais $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), ...\}$ é **ortogonal** em um intervalo $[a,b]$ se*

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, m \neq n.$$

Considerando que

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, ..., \text{sen}\frac{\pi}{p}x, \text{sen}\frac{2\pi}{p}x, \text{sen}\frac{3\pi}{p}x, ...\right\}$$

é ortogonal no intervalo $[-p,p]$ e supondo que f seja uma função definida no intervalo $[-p,p]$ e que possa ser desenvolvida na série trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \text{sen}\frac{n\pi}{p}x\Big). \tag{1}$$

Para determinar os coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...\}$ emprega-se:

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-p}^{p} \cos\frac{n\pi}{p}xdx + b_n \int_{-p}^{p} \text{sen}\frac{n\pi}{p}xdx\Big). \tag{2}$$

Por ortogonalidade, o membro direito da equação (2) se reduz a um único termo e, consequentemente,

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-p}^{p} = pa_0. \tag{3}$$

Resolvendo a equação (3) em relação a a_0, obtém-se

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx. \tag{4}$$

Multiplicando a equação (1) por $\cos(m\pi x/p)$ e integrando, tem-se

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}xdx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}xdx+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}xdx + b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\text{sen}\frac{n\pi}{p}xdx\Big). \tag{5}$$

Por ortogonalidade, a equação (5) se reduz a

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx = a_n p$$

e

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx.$$

Finalmente, multiplicando a equação (1) por $\text{sen}(m\pi x/p)$ e integrando obtém-se

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\text{sen}\frac{n\pi}{p}xdx. \tag{6}$$

Definição 3.3. *A **Série de Fourier** de uma função f definida no intervalo $(-p,p)$ é dada por*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\Big)$$

onde

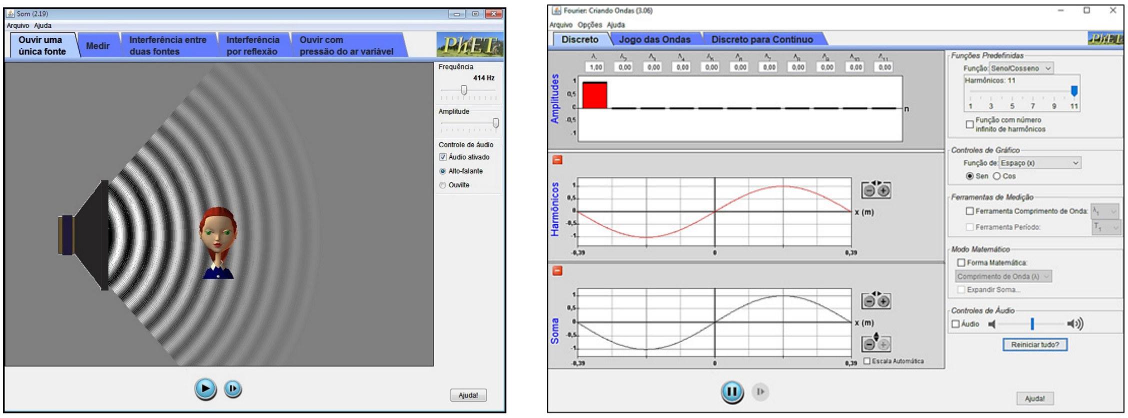
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}dx, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\text{sen}\frac{n\pi}{p}xdx.$$

A onda resultante da soma corresponde a uma determinada nota musical e possui um timbre característico que depende da soma dos harmônicos escolhidos. Os harmônicos e suas respectivas amplitudes podem ser escolhidos de formas diversas, obtendo-se assim os mais variados timbres.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0288

4 Atividades utilizando simuladores iterativos

Depizoli [4] apresenta algumas sugestões de atividades utilizando simuladores interativos associando a Matemática e a Física através de imagens intuitivas de formas de ondas no estudo de funções trigonométricas. Uma de suas sugestões é o uso dos simuladores do site *PhET Interactive Simulations* [9] como "Som", Figura 3(a), e "Fourier: criando ondas", Figura 3(b).



(a) (b)

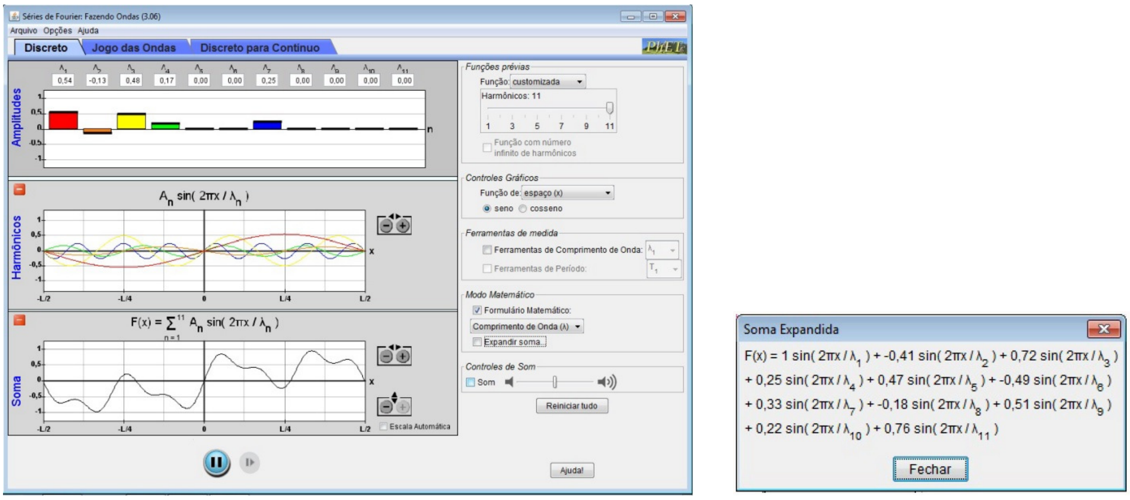
Figura 3: Simuladores interativos: (a) Som; (b) Fourier: criando ondas.

4.1 Simulador Interativo "Fourier: criando ondas"

O simulador "Fourier: criando ondas"possibilita desenvolver atividades nos ambientes Discreto, Jogo das Ondas e Discreto para Contínuo, construindo ondas como uma combinação das funções seno e cosseno.

- No ambiente **Jogo das Ondas** o aluno tem por objetivo descobrir quais são as funções que compõem a função soma, através de tentativas e erros. É recomendado começar em um nível baixo e depois passar para um nível superior. Essa é uma forma descontraída de compreender o conceito de harmônicos, que o timbre resulta da soma desses harmônicos e pode ser representado através da composição das funções seno e cosseno.

- no ambiente **Discreto**, Figura 4(a), os alunos poderão definir o número de harmônicos, escolher como ouvir o som emitido. Nessa atividade espera-se que os alunos possam associar o gráfico obtido aos sons produzidos; analisar a amplitude, o comprimento de onda e o período e a soma expandida, Figura 4(b).



(a) (b)

Figura 4: (a) Exemplo de atividade no ambiente interativo Discreto ; (b) soma expandida da função obtida.

- No ambiente **Discreto para Contínuo**, o aluno pode explorar os espaçamentos entre as componentes de Fourier, seus coeficientes, o comportamento das componentes e a combinação destas componentes e analisar os gráficos obtidos. Este ambiente requer mais orientação do que os anteriores.

5 Conclusões

Com um caráter lúdico, a música pode despertar o interesse de conteúdos matemáticos como frações, progressões e funções trigonométricas.

O conhecimento das Séries de Fourier é importante aos professores da Educação Básica pois, juntamente com os simuladores intuitivos, fornecem um suporte para o ensino de funções trigonométricas.

Os simuladores intuitivos são acessíveis e instigantes e podem facilitar a compreensão dos elementos envolvidos no estudo de funções trigonométricas. É fundamental elaborar um roteiro para que tais atividades atinjam o seu objetivo.

Agradecimentos

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

Referências

[1] O. J. Abdounur. Matematica e música: o pensamento analógico na construção de significados. Escrituras, São Paulo, 2010.

[2] BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997a. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 23 março de 2018

[3] C. B. R. Camargos, Música e matemática: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. Dissertação de Mestrado, UFOP, 2010.

[4] C. A. Depizoli, Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, PR, 2015.

[5] V. E. P. Lazzarini. Elementos de Acústica. Notas de Aulas, Music Department National University of Ireland, Maynooth, 2002.

[6] B. Marcolini. Flauta pré-histórica. http://www.cienciahoje.org.br/noticia/v/ler/id/1219/n/flauta_pre-historica. Acesso em 20 de março de 2018.

[7] MEC. Indicações para a construção de um projeto curricular interdisciplinar. http://portal.mec.gov.br/par/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/13564-indicacoes-para-a-construcao-de-um-projeto-curricular-interdisciplinar. Acesso em 15 de janeiro de 2018.

[8] H. de F. e Paula, Identificação do comprimento de onda em ondas transversais e longitudinais. http://www.pontociencia.org.br/galeria/?content%2FFisica%2FOptica%2FIdentificacao+do+comp+de+onda+em+ondas+transversais+e+longitudinais.jpg. Acesso em 20 de março de 2018.

[9] Phet. PhET Interactive Simulactions. *Fourier: Criando ondas*. University of Colorado Boulder. https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/legacy/fourier. Acesso em 20 de março de 2018.

[10] F. Ramalho Junior, N.G. Ferraro e P. T. Soares. Os Fundamentos da Física, Volume 2, 11a. Edição, Editora Centauro, 2015.

[11] D. G. Zill and M. R. Cullen. *Equações Diferenciais*, Volume 1, 3a Edição. Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0288