Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Estimativas para a norma do sup para uma equação de advecção-difusão duplamente não linear: o caso geral

Jocemar Q. Chagas[1]
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG, Ponta Grossa, PR
Patrícia L. Guidolin[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Viamão, RS
Paulo R. Zingano[3]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

**Resumo**. Indicamos como é possível usar algumas desigualdades de energia padrão para obter, de uma forma relativamente curta, a derivação da seguinte estimativa fundamental na norma do sup

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\,\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\delta_1}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\delta_2}\right\}, \quad \forall\ t>0,$$

onde $\delta_1 = \frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$ e $\delta_2 = \frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$, para soluções da equação de adveção-difusão duplamente não linear regularizada

$$u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^\alpha|\nabla u|^\beta\nabla u\big) + \eta\,\Delta u,$$

quando $\boldsymbol{f}$ atende a condições gerais, expostas a seguir. $\mathbb{B}(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_p(t_0;t)$ também serão definidas a seguir.

**Palavras-chave**. Equações Diferenciais Parciais, Equações de Evolução, Equações Parabólicas, Estimativas para a norma do sup, Soluções globais

## 1 Introdução

Considemos o problema regularizado

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^\alpha|\nabla u|^\beta\nabla u\big) + \eta\,\Delta u, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(\cdot,0) = u_0 \ \in\ L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{array}\right. \tag{1}$$

onde $\eta > 0$ está fixo e $1 \leq p_0 < \infty$ é dado; $\alpha$ e $\beta$ são constantes, com $\alpha,\beta \geq 0$ e $\alpha+\beta > 0$; e a função $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz $|\boldsymbol{f}(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{\kappa+1}$, onde $B(T) < \infty$, definida adequadamente para $\kappa \geq 0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, $u\in\mathbb{R}$, denota a *variação* de

[1]jocemarchagas@uepg.br
[2]patricia.guidolin@viamao.ifrs.edu.br
[3]paulo.zingano@ufrgs.br

 

$\boldsymbol{f}(x,t,u)$ em $\mathbb{R}^n$ e controla o tamanho de suas derivadas, e apresentaremos as ideias que permitem obter para suas soluções a seguinte estimativa fundamental na norma do sup:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\left\{\left\|u(\cdot,t_0)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\, \big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\delta_1}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\delta_2}\right\}, \quad \forall\ t>0, \tag{2}$$

bem como estipular os valores de $\delta_1$ e $\delta_2$ para os quais a estimativa é válida. As grandezas $\mathbb{B}(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_p(t_0;t)$ são definidas como $\mathbb{B}(t_0;t) := \sup\limits_{t_0\leq\tau\leq t}\big(B(\tau)\big)$, para $0 \leq t_0 \leq t < T_*$, e $\mathbb{U}_p(t_0;t) := \sup\limits_{t_0\leq\tau\leq t}\Big(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)$, para $1 \leq p_0 \leq p \leq \infty$. A existência de solução suave para o problema regularizado (1) em um determinado intervalo $[0,T_*)$ é garantida pela teoria geral de equações parabólicas (ver, por ex., [6] ou [7]). As ideias aqui apresentadas podem ser vistas com mais detalhes, por exemplo, em [1], onde estão aplicadas a uma equação um pouco mais simples; em [3], onde $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz a uma condição adicional de estabilidade, e ainda em [2] e em [5].

## 2 Resultados

Iniciamos derivando uma importante desigualdade de energia:

**Proposição 2.1.** *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução de (1), para $0 \leq t < T_*$. Supondo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $p \geq p_0$, vale*

$$\frac{d}{dt}\left\|u(\cdot,t)\right\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q\,(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x,t)\right|^{q-2+\alpha}|\nabla u(x,t)|^{\beta+2}\,dx \leq$$
$$\leq q\,(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}\left|u(x,t)\right|^{q-2}\nabla u(x,t)\cdot\boldsymbol{f}(x,t,u)\,dx. \tag{3}$$

*para todo $q$ satisfazendo $q \geq p \geq p_0$ e $q \geq 2$, e para todo $t \in (0,T_*)\backslash E_q$, onde $E_q \subset (0,\infty)$ é um conjunto de medida nula.*

*Idéia da prova*: Para $\delta > 0$, $R > 0$ e $0 < \varepsilon \leq 1$ dados, multiplicamos a equação em (1) por $\Phi'_\delta(u).\zeta_R(x)$, onde $\Phi_\delta(u)$ é a função auxiliar definida por $\Phi_\delta(u) := u^2$, se $q = 2$; ou $\Phi_\delta(u) := \big(L_\delta(u)\big)^q$, se $q > 2$, com $L_\delta(u) := \int_0^u S\big(\frac{v}{\delta}\big)dv$ e $S(v)$ é tal que $S'(v) \geq 0,\ \forall\ v$, $S(0) = 0$ e $S(v) = sgn(v), |v| \geq 1$; e $\zeta_R(x)$ é a função de corte definida por $\zeta_R(x) := 0$, se $|x| > R$; ou $\zeta_R(x) := e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}$, se $|x| \leq R$.

Após integrar a equação resultante

$$\Phi'_\delta(u)\,u_t\,\zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u)\,div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big)\,\zeta_R(x) =$$
$$= \Phi'_\delta(u)\ div\big(|u|^\alpha|\nabla u|^\beta\nabla u\big)\,\zeta_R(x) + \Phi'_\delta(u)\,\eta\,\Delta u\,\zeta_R(x)$$

sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0,t]$, com $0 < t_0 < t \leq T$, rearranjar adequadamente os termos, efetuar as passagens ao limite com $\delta \to 0$, $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, e $t_0 \to 0$, utilizando adequadamente os

Teoremas da Convergência Dominada e da Convergência Monótona e a Desigualdade de Young, chegamos a

$$\left\|u(\cdot,t)\right\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}+q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2+\alpha}|\nabla u|^{\beta+2}dx d\tau+\eta q(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}|\nabla u|^2 dx d\tau =$$

$$= \left\|u(\cdot,0)\right\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q\,(q-1)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{q-2}\,\nabla u\cdot \boldsymbol{f}(x,\tau,u)\,dx\,d\tau, \tag{4}$$

para $q$ satisfazendo $q \geq p \geq p_0$ e $q > 2$. Se $q = 2$, substituímos $\Phi_\delta(u)$ por $u^2$ no início e (com $p_0 \leq 2$) chegamos a:

$$\left\|u(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\alpha}\,|\nabla u|^{\beta+2}\,dx\,d\tau + 2\,\eta\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx\,d\tau =$$

$$= \left\|u(\cdot,0)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u\cdot \boldsymbol{f}(x,\tau,u)\,dx\,d\tau. \tag{5}$$

Todos os termos em (4) e (5) apresentam integrais bem definidas e finitas, envolvendo funções integráveis (a Lebesgue) nas regiões indicadas. É necessário provar, de antemão, que para algum $p \geq p_0$ e para qualquer $q$ satisfazendo $q \geq p$ e $q \geq 2$ valem:

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^{q-2+\alpha}\,|\nabla u(x,t)|^{\beta+2}dx\,dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^{q-2}\,|\nabla u(x,t)|^{2}dx\,dt < \infty.$$

Aplicando o Teorema de Diferenciação de Lebesgue, para cada $q \geq p \geq p_0$, obtemos o resultado desejado (3), para todo $t \in (0,T_*)\backslash E_q$, e para $q$ satisfazendo a $q \geq p \geq p_0$ e $q \geq 2$. $\square$

A seguir, para $p \geq p_0$, alteramos a hipótese $p_0 \leq p \leq q$ para $\sigma p \leq q < \infty$, com $\sigma$ satisfazendo a $\sigma \geq 1$ e $\sigma \geq 1 + \frac{\gamma_-}{p}$, onde $\gamma_-$ denota a parte negativa de $\gamma = \frac{\kappa(\beta+2)-(\alpha+\beta)}{(\beta+1)}$ ($p$ deve satisfazer, adicionalmente, a condição $p \geq \frac{n(\kappa-(\alpha+\beta))}{(\beta+1)}$), e, juntamente com a desigualdade de energia (3), usaremos a desigualdade de interpolação do tipo Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG):

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|w(\cdot,t)\|^{1-\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\,\|\nabla w(\cdot,t)\|^{\theta}_{L^{\tilde{p}}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ w \in C^1_0(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$, e $r$, $s$ e $\tilde{p}$ satisfazem a $0 < s \leq r \leq \infty$, $1 \leq \tilde{p} \leq \infty$, e $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{n}\right)\theta + \frac{(1-\theta)}{s}$ (para maiores detalhes sobre esta desigualdade, ver, por ex., [4]), para provar, em duas etapas, o que chamamos de *Lema Fundamental*, um resultado que relaciona as normas $L^q$ e $L^{q/\sigma}$ das soluções $u(\cdot,t)$:

**Lema 2.1. (Lema Fundamental)** *Seja $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*),L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (1), para $0 \leq t < T_*$. Se $q$ satisfaz a $q \geq 2$ e $\sigma p \leq q < \infty$, então, para cada $0 \leq t_0 < T_*$, vale*

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) \leq \max\left\{\left\|u(\cdot,t_0)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)};\ K(q)\,\mathbb{B}(t_0;t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}}\,\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}}\right\}, \tag{7}$$

*onde* $a = \dfrac{n[\kappa-(\alpha+\beta)]}{(\beta+1)}$ *e* $K(q) = \left(\dfrac{(q+\alpha+\beta)}{(\beta+2)}\right)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-\sigma a}}.(C_1)^{\frac{(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}\frac{n(\sigma-1)}{(q-\sigma a)}}.(C_2)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}}.$

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0273  

*Idéia da prova*: Na primeira etapa buscamos garantir algum controle sobre o comportamento da norma $L^q$ de $u(\cdot,t)$. Se em determinado $\hat{t} \in (0,T_*)$, ocorre $\frac{d}{dt}\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0$, então $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ está *decrescendo* e, ao menos localmente, é finito. Porém, se $\frac{d}{dt}\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \geq 0$, então $\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ pode estar *crescendo*; mas conseguimos estimar $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ em função de $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}$, para algum $\sigma \geq 1$; e podemos mostrar também que $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}$ não está crescendo (ao menos em uma vizinhança de $\hat{t}$). Dessa forma, $\|u(\cdot,\hat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ será finito, ao menos pontualmente: se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para algum $p \geq p_0$, para qualquer $q$ satisfazendo a $q \geq 2$ e $\sigma p \leq q < \infty$, com $\sigma$ satisfazendo as hipóteses $\sigma \geq \Big(1 + \frac{\gamma_-}{p}\Big)$ e $p \geq \frac{n\big(\kappa-(\alpha+\beta)\big)}{(\beta+1)}$, se em algum $\hat{t} \in (0,T_*)\backslash E_q$ ocorre

$$\frac{d}{dt}\big\|u(\cdot,t\,)\big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big|_{t=\hat{t}} \geq 0,$$

onde $E_q \subset (0,\infty)$ é um conjunto de medida nula, podemos tomar a desigualdade (3), descartando seu primeiro termo, majorar o lado direito, escolher o valor adequado para $\gamma$ e usar cuidadosamente a desigualdade do tipo SNG dada em (6), com $w(\cdot,t)$ dado por

$$w(x,t) := \big|u(x,t)\big|^{\frac{q+\alpha+\beta}{(\beta+2)}}, \quad \forall\ x \in R^n,\ \forall\ t > 0,$$

para obter, para $q \geq 2$:

$$\begin{aligned}\big\|u(\cdot,\hat{t}\,)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq & \left(\frac{(q+\alpha+\beta)}{(\beta+2)}\right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)}} \\ & .\big(C_1\big)^{\frac{n(\beta+2)(q+\gamma)(\sigma-1)}{(q+\alpha+\beta)[q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)]}}.\big(C_2\big)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}} \\ & .\big(B(\hat{t})\big)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{(\beta+1)[q(\beta+2)+n\sigma((\alpha+\beta)-\gamma)]}}.\big\|u(\cdot,\hat{t})\big\|^{\frac{q(\beta+2)+n[(\alpha+\beta)-\gamma]}{q(\beta+2)+n\sigma[(\alpha+\beta)-\gamma]}}_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Na segunda etapa eliminamos a dependência pontual de $\hat{t}$: inicialmente, para cada $q$ satisfazendo a $q \geq 2$ e $\sigma p \leq q < \infty$, definimos

$$K(q) := \left(\frac{(q+\alpha+\beta)}{(\beta+2)}\right)^{\frac{n(\beta+2)(\sigma-1)}{q(\beta+2)-n\sigma(\gamma-(\alpha+\beta))}}.\big(C_1\big)^{\frac{n(\beta+2)(q+\gamma)(\sigma-1)}{(q+\alpha+\beta)[q(\beta+2)-n\sigma(\gamma-(\alpha+\beta))]}}.\big(C_2\big)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}}$$

e, com $a = \frac{n[\kappa-(\alpha+\beta)]}{(\beta+1)}$, podemos rescrever a desigualdade (8) como

$$\big\|u(\cdot,\hat{t}\,)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(q)B(\hat{t}\,)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}}\big\|u(\cdot,\hat{t}\,)\big\|^{\frac{q-a}{q-\sigma a}}_{L^{q/\sigma}(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando as definições de $\mathbb{B}(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_p(t_0;t)$, e definindo $\Lambda(q) \geq 0$ por

$$\Lambda(q) := K(q)\,\mathbb{B}(t_0;t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}}\,\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}},$$

podemos completar a demonstração de que, para qualquer $0 \leq t_0 \leq t \leq T_*$ fixado, vale

$$\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \max\left\{\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)};\ K(q)\,\mathbb{B}(t_0;t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}}\,\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}}\right\}, \tag{9}$$

ao estudar três casos: caso 1: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q)$, e $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q)$, $\forall\ t_0 \le \tau \le t$; caso 2: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \Lambda(q)$, *mas* existe $t_1 \in (t_0,t)$ tal que $\|u(\cdot,t_1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Lambda(q)$; caso 3: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \Lambda(q)$. Como a desigualdade (9) será sempre válida, $\forall\ 0 \le t_0 \le t \le T_*$ fixado, também deve ser válida para $\mathbb{U}_p = \sup\limits_{t_0\le\tau\le t} \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$. Chegamos assim à validade de (7), como desejado. $\square$

Obs.: Ao redefinirmos, em (7), $\widetilde{\mathbb{B}}(t_0;t) := \mathbb{B}(t_0;t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)}}$, obtemos a validade de

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) \le \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)};\ K(q)\,\widetilde{\mathbb{B}}(t_0;t)^{\frac{1}{(q-\sigma a)}}\ \mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}} \right\}. \tag{10}$$

Utilizamos o Lema Fundamental juntamente com um procedimento iterativo para obtermos, em mais algumas etapas, o resultado principal deste trabalho, uma estimativa para limitação da norma do sup da solução $u(\cdot,t)$ do problema (1), para $0 < t < T_* \le \infty$:

**Teorema 2.1.** *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *solução do problema (1) para* $0 \le t < T_*$. *Dado* $p \ge p_0$, *para cada* $0 \le t_0 < t < T_*$ *vale*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\ \big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\delta_1}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\delta_2} \right\}, \quad \forall\ t>0, \tag{11}$$

*onde* $\delta_1 = \frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$ *e* $\delta_2 = \frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$.

*Passos da prova*:

No primeiro passo usa-se um argumento iterativo, baseado na desigualdade (10), que permite estimar normas $L^q$ da solução $u(\cdot,t)$ para valores altos de $q$, em todo o intervalo $(t_0,t)$, com $0 \le t_0 \le t \le T_*$, em função de normas mais baixas de $u$: prova-se que, para $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (1), dado $p \ge p_0$, para cada $0 \le t_0 < t < T_*$ vale

$$\mathbb{U}_{\sigma p}(t_0;t) \le \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\sigma p}(\mathbb{R}^n)};\ K(\sigma p)\,\widetilde{\mathbb{B}}(t_0;t)^{\frac{1}{(\sigma p-\sigma a)}}\ \mathbb{U}_p(t_0;t)^{\frac{(\sigma p-a)}{(\sigma p-\sigma a)}} \right\}.$$

Além disso, para cada $m \ge 2$, vale:

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0;t) \le \max\Bigg\{ & \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)};\\ & \left(\prod_{i=l}^{m}\big(K(\sigma^i p)\big)^{\frac{\sigma^m p-a}{\sigma^m p-\sigma^{m-i}a}}\right).\Big(\widetilde{\mathbb{B}}(t_0;t)\Big)^{\sum_{i=l}^m \frac{(\sigma^m p-a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p-a)(\sigma^{i-1}p-a)}}.\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\sigma^m p-a}{\sigma^m p-\sigma^{m-l+1}a}};\\ & \left(\prod_{i=1}^{m}\big(K(\sigma^i p)\big)^{\frac{\sigma^m p-a}{\sigma^m p-\sigma^{m-i}a}}\right).\Big(\widetilde{\mathbb{B}}(t_0;t)\Big)^{\sum_{i=1}^m \frac{(\sigma^m p-a)}{\sigma^{m-i+1}(\sigma^i p-a)(\sigma^{i-1}p-a)}}.\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\frac{\sigma^m p-a}{\sigma^m p-\sigma^m a}} \Bigg\}\end{aligned} \tag{12}$$

com $2 \le l \le m$. A demonstração de (12) é feita por indução, tomando inicialmente $q = \sigma p$ em (10); depois $q = \sigma^2 p$ em (10), e assim sucessivamente.

O próximo passo apresenta um pequeno avanço, mostrando expoentes mais compactos, além de considerar novamente a grandeza $\mathbb{B}(t_0;t)$ em vez de $\widetilde{\mathbb{B}}(t_0;t)$: através de simples manipulações dos expoentes, prova-se, para cada $0 \leq t_0 < t < T_*$, que vale

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0;t) \leq \max\Bigg\{ & \big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \\ & \left(\prod_{i=l}^{m}\big(K(\sigma^i p)\big)^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-i}a)}}\right).\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\frac{n}{(\beta+1)}\cdot\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}.\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}; \\ & \left(\prod_{i=1}^{m}\big(K(\sigma^i p)\big)^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-i}a)}}\right).\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\frac{n}{(\beta+1)}\cdot\frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}}.\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\frac{(p-\sigma^{-m}p)}{(p-a)}}\Bigg\},\end{aligned} \tag{13}$$

para $2 \leq l \leq m$. Além disso, definindo-se $C(l,m) := \prod_{i=l}^{m}\big(K(\sigma^i p)\big)^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-i}a)}}$, pode-se reescrever (13), para cada $0 \leq t_0 < t < T_*$, como

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0;t) \leq \max\Bigg\{ & \big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)}; \\ & \big(C(l,m)\big).\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\frac{n}{(\beta+1)}\cdot\frac{(\sigma^{-l+1}-\sigma^{-m})}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}.\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^{\sigma^{l-1}p}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(p-\sigma^{-m}a)}{(p-\sigma^{-l+1}a)}}, \quad \forall\ 2 \leq l \leq m; \\ & \big(C(1,m)\big).\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\frac{n}{(\beta+1)}\cdot\frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}}.\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\frac{(p-\sigma^{-m}p)}{(p-a)}}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{14}$$

A seguir, usando a desigualdade de interpolação de normas

$$\|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)}\|u\|_{L^{\widetilde{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\theta},$$

onde $r < s < \widetilde{p}$ e $0 \leq \theta \leq 1$ satisfazem a $\frac{1}{s} = \frac{(1-\theta)}{r} + \frac{\theta}{\widetilde{p}}$, obtém-se uma estimativa mais simples para $\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0;t)$, ao estimar adequadamente os termos intermediários de (14), e juntá-los com o primeiro e o último termos: prova-se que, dado $p \geq p_0$, para cada $0 \leq t_0 < t < T_*$ vale

$$\mathbb{U}_{\sigma^m p}(t_0;t) \leq \widetilde{K}(m).\max\Bigg\{\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^{\sigma^m p}(\mathbb{R}^n)};\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\frac{n}{(\beta+1)}\cdot\frac{(1-\sigma^{-m})}{(p-a)}}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\frac{(p-\sigma^{-m}p)}{(p-a)}}\Bigg\} \tag{15}$$

onde $\widetilde{K}(m;n,p,\alpha,\beta,\kappa) = \max\Big\{1;\max\limits_{1\leq l\leq m} C(l,m)\Big\}$.

Por fim, simplesmente fazendo $m \to \infty$ em (15), obtém-se o resultado principal deste trabalho, uma estimativa para limitação da norma do sup da solução $u(\cdot,t)$ do problema (1): dado $p \geq p_0$, para cada $0 \leq t_0 < t < T_*$ vale

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_\infty(t_0;t) \leq \widetilde{K}(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\Bigg\{ & \big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \\ & \big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}}\Bigg\},\end{aligned}$$

 

Finalmente, para obter (11), basta relembrar a definição de $\mathbb{U}_p(t_0; t)$, com $p = \infty$, e definir $\delta_1$ e $\delta_2$, respectivamente, como

$$\delta_1 = \frac{n}{n(\alpha + \beta - \kappa) + p(\beta + 1)}; \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{p(\beta + 1)}{n(\alpha + \beta - \kappa) + p(\beta + 1)}.$$

# 3 Conclusões

Utilizamos um refinado procedimento de análise (que consiste na combinação de uma série de estimativas de energia, princípios da comparação e uma rebuscada interpretação da oscilação da solução do problema) para implementar um argumento do tipo $L^p - L^q$, e com isso conseguimos obter uma estimativa de limitação para $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, dada pelo máximo entre a norma do sup de $u_0$ e uma expressão adequada envolvendo o supremo de uma norma $L^p$ da solução do problema (1) em seu intervalo de existência, indicando a possibilidade de existência de soluções globais. As hipóteses sobre a função $\boldsymbol{f}(x, t, u)$ foram tomadas bastante gerais. Finalizamos informando que os valores de $\delta_1$ e $\delta_2$ obtidos no Teorema 2.1 são compatíveis por análise de escalas.

# Referências


[1] P. Braz e Silva, L. Schütz, P. R. Zingano, On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 93, 90-96, 2013.

[2] J. Q. Chagas, Contribuições para a teoria de equações parabólicas duplamente não lineares com termos advectivos. Tese de Doutorado, UFRGS, 2015.

[3] J. Q. Chagas, P. L. Guidolin, P. R. Zingano, Norma do sup para equações de advecção-difusão duplamente não lineares: um caso de decrescimento, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 5, N. 1, 2017. DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0034

[4] A. Friedman, Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[5] P. L. Guidolin, Contribuições para a teoria de equações do p-Laplaciano evolutivos com termos advectivos. Tese de Doutorado, UFRGS, 2015.

[6] O. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[7] D. Serre, Systems of Conservation Laws. Vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.


 