

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Uma Abordagem Explícita para a Estimativa de Fluxo de Calor com Variação Espacial e Temporal

Anny Resende Negreiros<sup>1</sup>

Luiz Alberto da Silva Abreu<sup>2</sup>

Diego Campos Knupp<sup>3</sup>

Antônio J. Silva Neto<sup>4</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica e Energia, Instituto Politécnico, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, RJ

**Resumo.** Este trabalho aborda o problema inverso de estimativa de fluxo de calor com variação espacial e temporal relacionado a uma placa unidimensional, bem como, emprega a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) para solução do problema direto. No caso do problema inverso, que é o foco deste estudo, apresenta uma formulação explícita com o objetivo de reconstruir o fluxo. Nesta reconstrução, as equações utilizadas na modelagem do problema direto foram manipuladas a fim de obter uma expressão onde a função a ser determinada aparece explicitamente. Foram considerados dois estudos de caso, para a estimativa de dois diferentes tipos de função representativos do fluxo de calor. Para o problema inverso de interesse foram utilizadas medições simuladas, sendo obtidas boas estimativas e com menor custo computacional, quando comparada a outras técnicas disponíveis na literatura.

**Palavras-chave.** Problemas Inversos, CITT, Estimativa de Fluxo, Formulação Explícita

### 1 Introdução

A estimativa de fluxos em problemas inversos de condução de calor pode fornecer respostas satisfatórias para diversas aplicações na engenharia e na medicina, áreas de elevado interesse científico e tecnológico. No caso da Engenharia, a aplicação do problema inverso tem, por exemplo, aplicações na fabricação de microchips, pois técnicas mais eficazes de resfriamento são necessárias para produção de sistemas rápidos, menores e mais confiáveis em microeletrônica [3]. Na produção de energia elétrica por conversão da luz solar, o problema inverso se aplica à identificação de fluxos de calor, neste caso, temperaturas excessivas degradam células fotovoltaicas, o que demanda um sistema efetivo de controle na dissipação [2]. Na medicina se aplica à termografia, também conhecida como imagem

---

<sup>1</sup>anegreiros@iprj.uerj.br

<sup>2</sup>luiz.abreu@iprj.uerj.br

<sup>3</sup>diegoknupp@iprj.uerj.br

<sup>4</sup>ajsneto@iprj.uerj.br

térmica ou infravermelha, na detecção de tumores por meio da análise de anormalidades na distribuição da temperatura [7].

Vários métodos foram implementados com sucesso, a fim de se estimar a temperatura e o fluxo de calor com variação espacial e temporal. Em problemas onde é necessária a estimativa sequencial de um parâmetro, é comum a utilização de filtros de Kalman. Por exemplo, na Ref. [5], a estimativa do fluxo de calor variável no tempo foi realizada por meio da aplicação do filtro estendido de Kalman e o estimador de mínimos quadrados recursivos ponderados. Na Ref. [9] o fluxo de calor bidimensional com variação temporal também foi estimado por meio da aplicação desse filtro, empregando-se técnica de aproximação de erros de modelo (Approximation Error Model).

Recentemente, o problema de estimativa de fluxos de calor no contorno foi solucionado através de uma metodologia explícita com técnicas de regularização [4], a qual é empregada para obtenção de resultados mais precisos. Os autores demonstraram a possibilidade da utilização da técnica da transformada integral na regularização do problema inverso em questão. Resultados utilizando dados experimentais sintéticos, com diferentes níveis de ruído, foram utilizados e demonstraram a capacidade da abordagem proposta. Noutro trabalho [6], o qual empregou técnica de regularização, foi demonstrada a eficiência na estimativa de fluxo de calor numa equação unidimensional utilizando a técnica de Tikhonov. O presente artigo encontra similaridades com a Ref. [4] por também utilizar a ordem de truncamento da representação da temperatura experimental no campo transformado, visando estimar função fluxo de calor com variação espacial e temporal, para regularização do problema. O presente trabalho se diferencia da Ref. [4] pela aplicação de diferenças finitas avançadas na definição de temperaturas em posições discretas no campo experimental transformado.

## 2 Problema Direto

Considere um meio unidimensional com geração de energia interna  $g(x, t)$ . Uma das suas extremidades,  $x = 0$ , encontra-se termicamente isolada enquanto a extremidade oposta  $x = L$ , está exposta ao ambiente à temperatura  $T_\infty$ , trocando calor por convecção e radiação com um coeficiente efetivo de troca térmica  $h$ , como ilustra a representação esquemática apresentada na Figura 1.

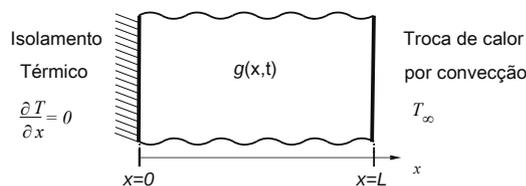


Figura 1: Representação esquemática do problema considerado.

Para o caso aqui tratado, considera-se que a temperatura  $T$  varia exclusivamente com a direção  $x$  e com o tempo  $t$ , assim como a geração de energia interna. Dessa forma, tem-se, a partir da equação geral de difusão térmica em coordenadas cartesianas [1], o

seguinte modelo matemático com as respectivas condições de contorno e inicial:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{g(x, t)}{\kappa} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < L \quad e \quad t > 0 \quad (1a)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$-\kappa \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = h [T(x, t)|_{x=L} - T_\infty], \quad t > 0 \quad (1c)$$

$$T(x, 0) = f(x) = T_0, \quad 0 < x < L \quad (1d)$$

onde  $\rho$  é a massa específica ( $kg/m^3$ ),  $\kappa$  é a condutividade térmica ( $W/(m \cdot k)$ ),  $c_p$  é o calor específico do material ( $J/(kg \cdot K)$ ) e  $\alpha = \kappa/\rho c_p$  é a difusividade térmica.

O método da Transformada Integral Clássica (CITT) [8] é utilizado para o problema direto, cuja construção considera primeiramente a solução homogênea do problema original Eqs. (1a-d), que resulta no seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \chi(\beta_m, x)}{dx^2} + \beta_m^2 \chi(\beta_m, x) = 0 \quad (2a)$$

$$\left. \frac{d\chi(\beta_m, x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \kappa \left. \frac{d\chi(\beta_m, x)}{dx} \right|_{x=L} + h \chi(\beta_m, x)|_{x=L} = 0 \quad (2b,c)$$

As Eqs. (2a-c) correspondem a um caso particular de um problema de Sturm-Liouville de modo que as autofunções  $\chi_m(x)$ , solução do problema, satisfazem a propriedade de ortogonalidade,

$$\int_V \chi_m(x) \chi_n(x) dV = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n \\ N_m, & se \quad m = n \end{cases} \quad (3)$$

com

$$N_m = \int_V \chi_m^2(x) dV \quad (4)$$

Para que o potencial  $T(x, t)$  possa ser escrito como uma expansão em termos da base de autofunções  $\chi_m(x)$ , considerou-se o par de transformada integral:

$$Transformada : \quad \bar{T}(\beta_m, t) = \int_0^L \chi(\beta_m, x) T(x, t) dx \quad (5a)$$

$$Inversa : \quad T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\beta_m, x)}{N(\beta_m)} \bar{T}(\beta_m, t) \quad (5b)$$

Operando as Eqs. (1a-d) com  $\int_V \chi(\beta_m, x)(\cdot) dV$  e realizando manipulações algébricas por meio da técnica da integração por partes, tem-se o sistema de EDO's para o potencial transformado:

$$\frac{d\bar{T}(\beta_m, t)}{dt} + \alpha \beta_m^2 \bar{T}(\beta_m, x) = \alpha \left[ \frac{h}{\kappa} T_\infty \chi(\beta_m, x) \right]_{x=L} + \frac{\bar{g}(t)}{\kappa} \quad (6a)$$

$$\bar{T}(\beta_m, 0) = \bar{T}_0(\beta_m, 0) \tag{6b}$$

onde

$$\bar{g}(t) = \int_0^L \chi(\beta_m, x)g(x, t)dx \tag{7}$$

A solução analítica para o sistema de EDO's, Eqs. (6a-b), para os potenciais transformados é dado por:

$$\bar{T}(\beta_m, t) = e^{-\alpha\beta_m^2 t} \left[ \bar{T}_0(\beta_m, 0) + \int_0^t e^{\alpha\beta_m^2 t'} A(\beta_m, t')dt' \right] \tag{8}$$

Considerando que o potencial  $\bar{T}(\beta_m, t)$  é conhecido, vide Eq. (5a), a fórmula de inversão pode ser reescrita, resultando na seguinte solução para o potencial  $T(x, t)$ :

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\beta_m^2 t}}{N(\beta_m)} \chi(\beta_m, x) \left[ \bar{T}_0(\beta_m, 0) + \int_0^t e^{\alpha\beta_m^2 t'} A(\beta_m, t')dt' \right] \tag{9}$$

O somatório da Eq. (9) foi truncado em uma ordem finita  $N_{tr}$ , o suficiente para garantir a precisão desejada na solução.

### 3 Problema Inverso

O problema inverso estudado envolve medições experimentais com o intuito de se estimar a fonte térmica,  $g(x, t)$ , na Eq. (1). Os dados experimentais foram simulados adicionando-se ruídos aleatórios aos resultados calculados com os valores exatos do campo transformado que se tem o objetivo de recuperar. As medidas simuladas de acordo com o domínio discretizado são dadas por:

$$T_{exp1}^{sup}(t), \text{ em } x = 0 \tag{10a}$$

$$T_{exp_i}^{int}(t), \text{ em } x = x_i, \text{ } i = 1, 2, \dots, N_{si} \tag{10b}$$

$$T_{exp_{N_x}}^{sup}(t), \text{ em } x = L \tag{10c}$$

Desta forma considerando o campo transformado, dado pela Eq. (5a), e as medidas experimentais tem-se:

$$\bar{T}_{exp}(\beta_m, t) = \int_0^L T_{exp}(x, t)\chi(\beta_m, x)dx \tag{11}$$

Para a determinação da função  $g(x, t)$  explicitamente, considera-se as medidas da temperatura no campo transformado representados pela Eq. (11), obtidas numericamente, e uma aproximação de diferença avançada para representar a derivada na Eq. (6a). Assim, obtém-se a seguinte expressão discretizada para  $\bar{g}(t)$ :

$$\bar{g}(\beta_m, t_k) = \kappa \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\bar{T}^{k+1}(\beta_m) - \bar{T}^k(\beta_m)}{\Delta t} \right] + \beta_m^2 \bar{T}^k(\beta_m) - \frac{h}{\kappa} \chi(\beta_m, x)|_{x=L} \right\} \tag{12}$$

com  $k = 1, 2, \dots, N_t$  e  $m = 1, 2, \dots, N_{trmax}$ , onde  $N_t$  define o número de nós no tempo e  $N_{trmax}$  a ordem de truncamento. A partir da análise da informação do campo transformado pode ser reconstruída a função  $g(x, t)$ :

$$g(x, t) = \sum_{m=1}^{N_{trmax}} \frac{\chi(\beta_m, x)\bar{g}(\beta_m, t)}{N(\beta_m, x)} \quad (13)$$

## 4 Resultados e Discussões

A metodologia da solução via CITT apresentada acima, foi implementada no software de computação simbólica Wolfram Mathematica. Para os resultados a seguir utilizou-se as propriedades do alumínio [1] em um meio com comprimento  $L = 1m$ , bem como  $h = 20W/mK$ ,  $T_\infty = 23^\circ C$  e  $T_0 = 30^\circ C$ . Os fluxos que pretende-se estimar neste trabalho são representados graficamente na Figura 2, que consistem em duas diferentes funções com variações no tempo e no espaço.

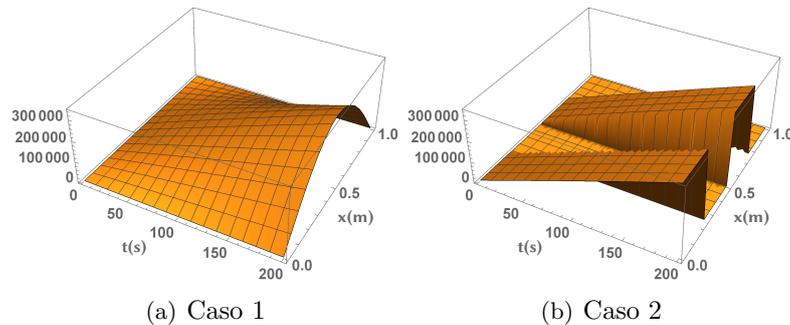


Figura 2: Gráfico 3D para a função  $g(x, t)$ .

A malha utilizada para estimação do fluxo em ambos os casos possui 200 nós em  $t$ , o que leva a 199 parâmetros a serem estimados. Os dados experimentais foram simulados considerando a solução CITT com as funções de teste exatas para os fluxos de calor aplicados vide Figura 2, e a adição de ruído a partir de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão  $\sigma = 0,5^\circ C$  e  $\sigma = 1^\circ C$ . A temperatura calculada no problema direto foi obtida por CITT com ordem de truncamento  $N_{tr} = 200$ , enquanto que para a temperatura recuperada pelo método explícito, foi empregada com uma ordem de truncamento menor, sob controle de erro relativo, evitando assim o chamado crime inverso.

A Figura 3 mostra o fluxo estimado, calculado com a Eq. (13), para diferentes ordens de truncamento  $N_{trmax}$ . No caso 1, para as temperaturas no campo experimental foram considerados 3 sensores internos, logo  $N_s = N_{si} + 2 = 5$ , enquanto no caso 2, o número de sensores internos foi 9, logo  $N_s = 11$ . Em ambos os casos, observa-se que quando a ordem de truncamento é pequena, a estimativa apresenta suavidade e boa concordância com o fluxo exato. A Fig. (4) mostra a temperatura reconstruída para o fluxo estimado com  $N_{trmax} = 5$ . Para a análise mais detalhada sobre a qualidade da temperatura reconstruída, a Tabela 1 apresenta o erro RMS, definido na Eq. (14).

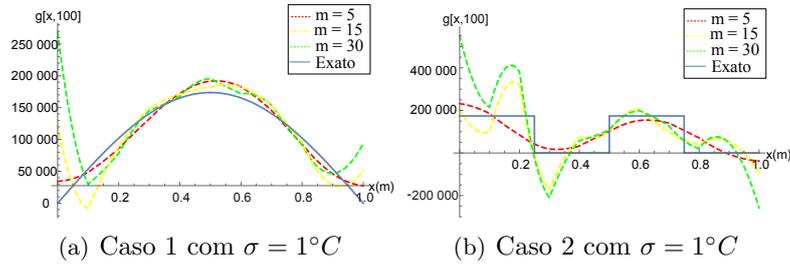


Figura 3: Gráfico para a estimativa da fonte térmica empregando diferentes ordens de truncamento  $N_{trmax}$ .

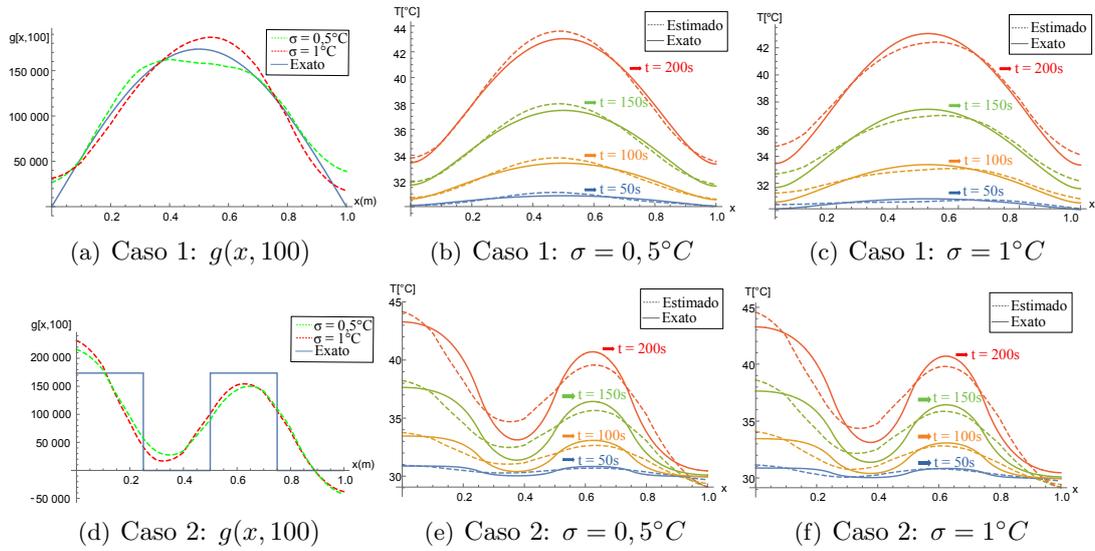


Figura 4: Função  $g(x, t)$  e a temperatura recuperada para diferentes níveis de ruídos nos dados experimentais.

Observando os valores dos erros RMS para cada caso fica claro como a abordagem explícita é capaz de recuperar a temperatura no campo transformado. Além disso, o esforço computacional para a aplicação do método é reduzido quando comparado aos métodos iterativos disponíveis na literatura.

Tabela 1: Erro RMS.

Casos	$\sigma = 0,5^\circ C$	$\sigma = 1^\circ C$
1	0,223243	0,43609
2	0,58085	0,727522

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N_t} \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_t} (T_{rec}(x_i, t_k) - T(x_i, t_k))^2} \quad (14)$$

## 5 Conclusões

Este trabalho demonstrou a abordagem explícita no campo transformado de estimativa do fluxo de calor em um meio unidimensional com variação espacial e temporal. Os resultados da reconstrução da temperatura com o fluxo estimado apresentam boa acurácia com a temperatura imposta, determinada com o problema direto por meio da CITT, além de apresentar na sua aplicação baixo custo computacional.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPERJ, do CNPq e da CAPES.

## Referências

- [1] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera e D. P. DeWitt. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. *John Wiley & Sons*, USA, 2011.
- [2] D. Guerrieri, Análise Teórico-Experimental de Microtrocadores de Calor para Controle Térmico de Painéis Fotovoltaicos de Alta Concentração, Dissertação de Mestrado, COOPE/UFRJ, 2013.
- [3] S. Kakac, H. Yuncu, K. Hijikata. Introduction to ASI on Cooling of Electronic Systems. *Cooling of Electronic Systems*, NATO ASI Series, volume 258, pages 1-15, 1993. DOI: 10.1007/978-94-011-1090-7.
- [4] D. C. Knupp e L. A. S. Abreu. Explicit boundary heat flux reconstruction employing temperature measurements regularized via truncated eigenfunction expansions, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2016. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2016.09.012.
- [5] Y. H. Ko, J. Z. Lu, K. T. Lu, T. F. Yeh. Inverse Estimation Problem of Determining the Unknown Timewise-varying Strength of a Primer Rapid Heat Source. *Procedia Engineering*, pages 295-304, 2014. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.06.346.
- [6] T. M. Lapinski e S. Leble. A Mathematica Program for heat source function of 1D heat equation reconstruction by three types of data, *ADS*, 2014. DOI: arXiv:1410.7066.
- [7] M. Mital e E.P. Scott. Thermal Detection of Embedded Tumors Using Infrared Imaging. *Journal of Biomechanical Engineering*, volume 129, pages 33-39, 2007. DOI: 10.1115/1.2401181.
- [8] M. N. Ozisik. *Heat Conduction*. John Wiley and Sons, 2 ed., page 49, 1999.
- [9] C. C. Pacheco, H. R. B. Orlande, M. J. Colaço, G. S. Dulikravich. Estimation of a Location-and Time-Dependent High-Magnitude Heat Flux in a Heat Conduction Problem Using the Kalman Filter and the Approximation Error Model. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, volume 68, pages 1198-1219, 2015.