Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Desvendando as Indeterminações

Diego Mathias Desanti[1]
Colégio Militar de Curitiba, Curitiba, PR
Roy Wilhelm Probst[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. Este trabalho mostra um estudo sobre as sete indeterminações matemáticas. A proposta deste trabalho é fornecer explicações mais completas e adequadas ao entendimento de estudantes, professores e entusiastas da Matemática sobre indeterminações. O texto contém uma lista de exemplos sobre todas as possibilidades de interminações através de limites cujo resultado pode ser igual: a zero, infinito, constante não nula, ou limite não existente. Além disso, tráz uma análise contextualizada dessas expressões através da História da Matemática e de como a tentativa de compreender o infinito trouxe avanços significativos tanto na Matemática quanto na Filosofia, para resolver problemas como os paradoxos de Zenão e do Hotel de Hilbert.

Palavras-chave. Indeterminações. Cálculo Diferencial e Integral. História da Matemática.

1 Introdução

Do dicionário da língua portuguesa, a palavra indeterminação significa aquilo que não está determinado, que é indefinido. Em Matemática, Lima afirma que essas expressões são "desprovidas de significado matemático" [4]. Na Álgebra Linear, por exemplo, a palavra indeterminação aparece para descrever um sistema de equações lineares que possui infinitas soluções [3]. No Cálculo a indeterminação aparece para descrever as sete formas indeterminadas em limites, das quais, duas envolvem um quociente, $0/0$ e ∞/∞, uma multiplicação, $0 \cdot \infty$, uma subtração, $\infty - \infty$ e três potências, 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Ao analisar qualquer uma dessas expressões, o questionamento sobre seu valor ou o resultado produzido é inevitável. Ora, todo número elevado ao expoente zero é igual a um, portanto deve-se ter $0^0 = 1$ ou então, $\infty - \infty = 0$ pois essa é uma subtração de um mesmo símbolo, e ainda, $1^\infty = 1$ pois nesse caso, há infinitos fatores iguais a um e um multiplicado por ele mesmo só pode ser um. Parece natural deduzir que essas afirmações são verdadeiras devido às definições, propriedades e teoremas da aritmética que o estudante está acostumado a estudar.

Porém, é necessário analisar essas expressões com maior cuidado. Deve-se ter clareza, por exemplo, de que escrever 1^∞ é um abuso de notação, ou seja, esta expressão é um

[1]dmdesanti@yahoo.com.br
[2]rwprobst@utfpr.edu.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0317

limite em que

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

com $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Vale ressaltar que expressões que envolvem o símbolo infinito não aparecem com muita frequência nos níveis básicos de ensino, o que leva o estudante a cometer o erro de operar esses símbolos como se fossem números, o que não deveria ocorrer. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é apresentar as sete formas indeterminadas, compreendê-las e contextualizar algumas delas. Mais ainda, o objetivo é mostrar aos estudantes e professores de Matemática que as indeterminações surgem em diversas situações e em diferentes contextos da Matemática, bem como propiciar ao leitor explicações mais adequadas sobre o significado de cada forma indeterminada.

2 As sete indeterminações

As sete indeterminações do Cálculo são $0/0$, 0^0, ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0 e 1^∞. Na Tabela 1 são apresentados exemplos elementares de limites que geram as sete formas indeterminadas cujos resultados podem: **(a)** ser igual a zero, **(b)** ser igual a ∞, **(c)** ser igual a $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 0)$ ou **(d)** não existir.

Tabela 1: Exemplos das sete formas indeterminadas

Tipo	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**
$0/0$	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$	$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\|x\|}{x}$
0^0	$\lim_{x\to 0^+} 0^x$	$\lim_{x\to -\infty} (2^{-x^2})^{1/x}$	$\lim_{x\to -\infty} (2^x)^{1/x}$	$\lim_{x\to 0^-} (2^{1/x})^{x \operatorname{sen}(1/x)}$
∞/∞	$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x}$
$0\cdot\infty$	$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x^2}$	$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{x}$	$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}$	$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
$\infty-\infty$	$\lim_{x\to\infty} (x-x)$	$\lim_{x\to\infty} (x^2-x)$	$\lim_{x\to\infty} [(x-1)-x]$	$\lim_{x\to\infty} [(x+\operatorname{sen} x)-x]$
∞^0	$\lim_{x\to\infty} (2^{x^2})^{-1/x}$	$\lim_{x\to\infty} (x^x)^{1/x}$	$\lim_{x\to\infty} (2^x)^{1/x}$	$\lim_{x\to 0^+} (2^{1/x})^{x \operatorname{sen}(1/x)}$
1^∞	$\lim_{x\to -\infty} (2^{1/x})^{x^2}$	$\lim_{x\to\infty} (2^{1/x})^{x^2}$	$\lim_{x\to\infty} (2^{1/x})^{x}$	$\lim_{x\to\infty} \left(2^{\operatorname{sen}(x)/x}\right)^x$

Ao observar todas as formas indeterminadas parece estar faltando uma combinação de símbolos, a forma 0^∞. Essa expressão não faz parte desse rol, isto é, 0^∞ não é indeterminado [6] . Para mostrar que essa expressão não é uma indeterminação, considere $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ onde $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Como a função exponencial e logarítmica são inversas uma da outra, tem-se

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = 0, \tag{1}$$

pois o expoente tende a $-\infty$. Note que a função exponencial é contínua, permitindo que seu cálculo ocorra após a aplicação do limite no expoente.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0317

3 Outro olhar para as indeterminações

Nessa seção são apresentadas algumas formas indeterminadas na Matemáticas através de uma abordagem que não se limita apenas ao uso do Cálculo Diferencial e Integral com a aplicação da Regra de L'Hôspital como costumeiramente é feito. A ideia é mostrar outros contextos e aplicações em que as formas indeterminadas podem aparecer, tais como o paradoxo de Zenão, a função delta de Dirac, hotel de Hilbert, dentre outros, cada qual contemplando de forma detalhada a indeterminação envolvida.

3.1 $0 \cdot \infty$

Que resultado pode produzir a multiplicação de zero pelo infinito? O que significa $0 \cdot \infty$? Será esse produto igual a zero ou igual ao infinito? A resposta depende do contexto em que tais elementos estão envolvidos. A contextualização dessa indeterminação segue através dos Paradoxos de Zenão de Eleia. Em sua época (século V a.C) uma questão discutida entre as diferentes correntes do pensamento era a validade da admissão da subdivisibilidade indefinida de uma grandeza ou se a grandeza seria dividida em um número muito grande de partes indivisíveis, assim, "há evidências de que na Grécia antiga se desenvolveram escolas de raciocínio matemático que abraçaram uma ou outra dessas premissas" [2].

Um dos Paradoxos de Zenão diz respeito a corrida entre o veloz herói Aquiles e uma tartaruga em que Aquiles dá a lenta tartaruga a vantagem de sair com uma certa distância a frente. O paradoxo diz que Aquiles jamais alcançaria a tartaruga, pois quando Aquiles alcançasse o ponto inicial em que a tartaruga se encontrava, a mesma já teria andado uma determinada distância. Quando Aquiles alcançasse o segundo ponto em que a tartaruga se encontrava, a mesma já teria andado mais uma certa distância e assim sucessivamente, admitindo a divisão da distância a ser percorrida em infinitas partes, o que tornaria a vitória de Aquiles impossível. Os Paradoxos de Zenão desafiam ideias intuitivas "de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero" [2].

Suponha que a tartaruga inicie a corrida com uma vantagem de 100 metros em relação a Aquiles e que a velocidade de Aquiles seja 10 vezes maior do que a velocidade da tartaruga. Então, quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá percorrido 10 metros. Quando Aquiles vencer os 10 metros a tartaruga terá andado 1 metro, depois $0,1$ metros e assim por diante. Dessa forma as distâncias percorridas por Aquiles em cada etapa será

$$100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \ldots,\ \frac{1}{10^n},\ \ldots$$

portanto a distância total percorrida por Aquiles é igual a

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = \frac{100}{1 - 1/10} = 111,\bar{1}$$

que é a soma de uma série geométrica de razão $1/10$ e primeiro termo igual a 100 de modo que a medida que n cresce, isto é, $n \to \infty$ a fração $1/10^n$ se torna muito pequena, ou seja,

$1/10^n \to 0$, logo a distância percorrida nesse caso seria $\infty \cdot 0$ em que o ∞ representa o número de termos e 0 representa a distância para termos quanto $n \to \infty$.

Portanto, a soma infinita das distâncias percorridas converge para $111,\bar{1}$ metros. Nessas condições, se Aquiles disputar com a tartaruga uma corrida com distância superior a $111,\bar{1}$ metros, ele vencerá a corrida tendo a ultrapassagem feita nos primeiros $111,\bar{1}$ metros do percurso.

Outro contexto em que a expressão $0 \cdot \infty$ aparece é na função Delta de Dirac. Essa função descreve problemas onde há uma força de magnitude grande atuando durante um pequeno intervalo de tempo [5]. Fenômenos como esse são de natureza impulsiva, como por exemplo, o sistema mecânico atingido pelo golpe de um martelo e também modelam problemas de distribuição de massas e cargas pontuais.

A função Delta de Dirac não é uma função no sentido literal da palavra como conhecido no Cálculo e sim uma distrubuição o qual vale ∞ para $x = 0$ e nula no restante da reta. Além disso, pode-se pensar em um retângulo cuja base é infinitamente pequena e a altura infinitamente grande, daí tem-se a ideia do produto $0 \cdot \infty$.

Considere a função f definida como

$$f(x-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon}, & \text{se} \quad a-\epsilon < x < a+\epsilon, \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq a+\epsilon, \end{cases}$$

em que $a > 0$ e ϵ é uma constante positiva. Graficamente f está ilustrada na Figura 1.

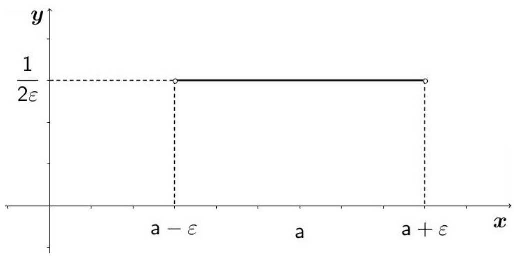

Figura 1: Gráfico da função f

Note que a área sob a reta $y = \dfrac{1}{2\epsilon}$ e delimitada pelas retas verticais $x_1 = a - \epsilon$ e $x_2 = a + \epsilon$ é igual a 1, pois o retângulo formado possui base medindo 2ϵ e altura $y = \dfrac{1}{2\epsilon}$, isto é,

$$A(\epsilon) = 2\epsilon \cdot \frac{1}{2\epsilon} = 1,$$

A função Delta de Dirac é dada por

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x-a).$$

Em termos de integral tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dx = 1.$$

Dessa forma quando $\epsilon \to 0^+$ então $\dfrac{1}{2\epsilon} \to \infty$, assim

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq a, \\ \infty, & \text{se} \quad x = a, \end{cases} \quad \text{e} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1.$$

Para manter a área constante igual a 1, se aumentar o comprimento do retângulo, será necessário diminuir sua altura e vice-versa. A indeterminação $0 \cdot \infty$ representa a área desse retângulo de modo que se a base tender ao infinito, a altura tenderá a zero, isto é, $0 \cdot \infty = 1$, nesse caso.

3.2 $\infty - \infty$

Essa indeterminação ocorre quando tem-se a subtração de duas funções quando ambas tendem ao infinito, isto é, dadas as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ então $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)]$ gera a forma indeterminada $\infty - \infty$. Como ∞ não representa um número real então não pode-se empregar a aritmética da maneira usual e o resultado desse limite não é igual a zero necessariamente, mas dependerá da escolha de f e g e do comportamento de cada função podendo essa diferença de infinitos ser igual a uma constante ou inexistir.

A contextualização dessa expressão se dá através do Paradoxo do Hotel de Hilbert que envolve conjuntos infinitos. Um conjunto A é enumerável se é finito ou se existe uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, isto é, existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$. A partir dessa ferramenta será possível compreender o Paradoxo do Hotel de Hilbert.

O Paradoxo do Hotel de Hilbert considera um hotel com infinitos quartos todos enumerados com números naturais, isto é, o primeiro quarto corresponde ao quarto de número 1, o segundo quarto corresponde ao quarto de número 2 e assim por diante. O hotel encontra-se lotado, ou seja, os infinitos quartos estão ocupados por infinitos hóspedes. Ao chegar um novo hóspede, mesmo com o hotel lotado, o gerente do hotel consegue acomodá-lo, afinal, o hotel possui infinitos quartos. Para tal, o gerente solicita que o hóspede do quarto número 1 mude-se para o quarto de número 2, o hóspede que se encontrava no quarto número 2 mude-se para o quarto de número 3, o hóspede que se encontrava no quarto de número n mude-se para o quarto de número $n + 1$ e assim por diante, tendo em vista que na numeração através do conjunto dos números naturais, sempre haverá um próximo termo. Com essa manobra, o quarto de número 1 está vago para o novo hóspede. A estratégia é a mesma se chegar um grupo de n hóspedes para se acomodar no hotel; o gerente terá que deslocar o hóspede do quarto de número 1 para o quarto de número $n + 1$, e assim por diante de modo que os n primeiros quartos fiquem vagos.

Ao chegar um ônibus com infinitos passageiros, para acomodar todos eles, o gerente solicita aos hóspedes do hotel que se mude de quarto novamente de modo que cada um deve ir para o quarto cujo número é o dobro do quarto em que se encontra, isto é, o hóspede do quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, o hóspede do quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, o hóspede do quarto número n muda-se para o quarto de número $2n$ e assim por diante. Desse modo, todos os quartos cujos números são ímpares encontram-se disponíveis para os infinitos novos hóspedes.

Agora, o desafio do gerente aumenta ao ter que acomodar uma excursão de infinitos ônibus com infinitos passageiros em cada ônibus. Para tal, o gerente solicita que os hóspedes mudem-se de quarto novamente, de modo que o número do novo quarto é igual a 2 elevado ao número do quarto em que se encontrava, isto é, o hóspede que se encontra no quarto de número 1 muda-se para o quarto de número 2, pois $2^1 = 2$, o hóspede que se encontra no quarto de número 2 muda-se para o quarto de número 4, pois $2^2 = 4$, o hóspede que se encontra no quarto de número n muda-se para o quarto de número 2^n e assim por diante.

Assim, para alocar os infinitos novos hóspedes dos infinitos ônibus da excursão, o gerente usa a seguinte estratégia: os passageiros do primeiro ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é igual a 3 elevado ao número do seu assento do ônibus, ou seja, o passageiro do assento número 1 será acomodado no quarto de número 3, pois $3^1 = 3$, o passageiro do assento número 2 será acomodado no quarto de número 9, pois $3^2 = 9$, o passageiro do assento número n, será acomodado no quarto de número 3^n e assim por diante.

Os próximos infinitos ônibus deverão seguir a sequência dos números primos, logo, os passageiros do segundo ônibus serão acomodados nos quartos cujo número é o resultado de 5 elevado ao número do seu assento no ônibus.

Analogamente, os passageiros do terceiro ônibus serão acomodados nos quartos cujos números são potências de 7 e assim por diante, para cada ônibus, uma potência cuja base é um número primo. A questão que deve ser levantada é se com essa estratégia traçada pelo gerente ocorre o risco de dois hóspedes serem acomodados no mesmo quarto. Felizmente isso não acontece, por exemplo, os passageiros do primeiro ônibus estão acomodados em quartos de números da forma 3^n e do segundo ônibus, estão acomodados em quartos de números da forma 5^m. Supondo que tenha um quarto com dois hóspedes, isso implica admitir que $3^n = 5^m$, portanto, como 3^n é divisível por 3, então tem-se 5^m também divisível por 3 o que implica que 5 é divisível por 3 o que é um absurdo, pois, sabe-se que 5 não é divisível por 3. Isso ocorre para quaisquer dois números primos distintos.

Com essa estratégia, ainda estão vagos os quartos cujos números são divisíveis por mais de um número primo tendo em vista que o gerente acomodou os infinitos passageiros dos infinitos ônibus em quartos de número da forma p^n onde p é um número primo correspondente ao ônibus e n corresponde ao número do assento do ônibus p. Dessa forma, por exemplo, o quarto de número 6 está vago, pois 6 é divisível por 2 e por 3, podendo então, acomodar mais infinitos novos hóspedes, pois todos os múltiplos de 6 também estão vagos.

Ao fechar um determinado tempo de hospedagem, os passageiros do primeiro ônibus da excursão fazem o check-out e seguem seu destino. Para atualizar o número de quartos disponíveis para futuras hospedagens, o gerente percebe que se o hotel possui infinitos quartos e saíram infinitos hóspedes, então o hotel conta com $\infty - \infty$ quartos disponíveis ou ainda há $\infty - \infty$ hóspedes no hotel. Na impossibilidade de operar aritmeticamente com esses símbolos, pois "o símbolo ∞ não representa um número" [6], tampouco $-\infty$, o gerente conclui que $\infty - \infty = \infty$ nesse caso. Portanto, ainda restam infinitos quartos disponíveis e infinitos hóspedes no hotel. Por outro lado, se todos os hóspedes do hotel

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0317

fizerem o check-out, então haverá $\infty - \infty = 0$ pessoas hospedadas no hotel.

3.3 Outras indeterminações

Exemplos de contextualização das demais expressões indeterminadas podem ser encontradas na referência [1].

4 Conclusões

A percepção da inexistência de uma material compacto que tratasse das sete formas indeterminadas de forma contextualizada foi o que motivou a escolha do tema desenvolvido como trabalho de dissertação do PROFMAT [1].

As indeterminações não são expressões que ocorrem apenas no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral. Algumas delas aparecem no ensino básico, quando há a necessidade de mostrar o porquê da inexistência de uma divisão por zero e consequentemente o significado de $0/0$. Ao tratar de potenciação e suas propriedades, a estratégia não é diferente. O estudante comumente questiona o resultado de um número real não nulo elevado ao expoente zero o que implica a indagação sobre 0^0 e até mesmo o significado de 1^∞. Expressões que envolvem ∞, por exemplo, não são objetos de fácil compreensão, principalmente no Ensino Fundamental e Médio em que o currículo não contempla com muita ênfase tal elemento.

Assim, procurou-se nesse trabalhou desenvolver de forma contextualizada o significado de algumas das sete formas indeterminadas com o objetivo de prestar apoio aos estudantes, professores e entusiastas da Matemática na obtenção de explicações mais adequadas para essas expressões.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

[1] D. M. Desanti, Indeterminações, Dissertação de Mestrado, UTFPR, 2017.

[2] H. Eves, *Introdução a História da Matemática.* Unicamp, Campinas, 2004.

[3] G. Iezzi and S. Hazzan, *Fundamento de Matemática Elementar: sequências, matrizes, determinantes, sistemas.* Atual, São Paulo, 1977.

[4] E. L. Lima, *Meu Professor de Matemática.* SBM, Rio de Janeiro, 2011.

[5] E. C. Oliveira and J. E. Maiorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada.* Unicamp, Campinas, 2003.

[6] J. Stewart. *Cálculo.* Cengage Learning, São Paulo, 2016.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0317