Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Soluções Analítica e Numérica de um Equação Diferencial Parcial Hiperbólica utilizando o Método das Características

Urias de Moura Bueno Neto[1]
Departamento Acadêmico de Engenharia Ambiental, UTFPR, Campo Mourão, PR
Adilandri Mércio Lobeiro[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Campo Mourão, PR
Eudes José Arantes[3]
Departamento Acadêmico de Engenharia Ambiental, UTFPR, Campo Mourão, PR
Luciano Fleischfresser[4]
Departamento Acadêmico de Engenharia Ambiental, UTFPR, Campo Mourão, PR
Fellipe José de Morais[5]
Departamento Acadêmico de Engenharia Ambiental, UTFPR, Campo Mourão, PR

Neste trabalho, obteve-se as soluções analítica e numérica da equação diferencial parcial hiperbólica sujeita as condições iniciais e de contorno (1),

$$\left|\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0, & 0 < x < 1 \text{ e } 0 < t < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) & = & 0, & 0 < t < 1, \\ u(x,0) & = & \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 0 & 0 \leq x \leq 1, \end{array}\right. \tag{1}$$

com uso do método das características (MC).

O MC é uma técnica consagrada por transformar, mediante mudança de variável, equações diferenciais parciais (EDPs) em equações diferenciais ordinárias (EDOs) [1].

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem quase linear sobre um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pode ser escrita na forma

$$A(x,t)u_{xx} + B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} + F(x,t,u,u_x,u_t) = 0, \tag{2}$$

em que a variável dependente $u = u(x,t)$ é uma função desconhecida e $x$ e $t$ são variáveis independentes representantes do espaço e tempo, respectivamente. Pelo menos um dos coeficientes A, B e C é não nulo. Em problemas hiperbólicos duas inclinações reais são encontradas, uma positiva e outra negativa. As inclinações das curvas características para

[1]uriasneto@alunos.uftpr.edu.br
[2]alobeiro@uftpr.edu.br
[3]eudesarantes@uftpr.edu.br
[4]lfle@utfpr.edu.br
[5]fellipe-morais@hotmail.com

quaisquer equações diferenciais parciais hiperbólicas de segunda ordem são obtidas por meio das expressões

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{\pm} = \frac{B(x,t) \pm \sqrt{B(x,t)^2 - 4A(x,t)C(x,t)}}{2A(x,t)} \tag{3}$$

Nesse estudo de caso, obteve-se $(dt/dx)_+ = +1$ e $(dt/dx)_- = -1$, que foram essenciais para realizar as mudanças de variáveis e obter a solução analítica $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$. As inclinações das curvas característica, também foram utilizadas para implementar um algoritmo no software MatLab para calcular a solução numérica. Em particular, plotou-se o gráfico no tempo $t = 0.3$ s.

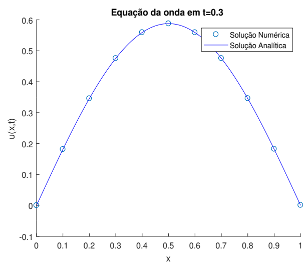


Figura 1: Gráfico no tempo $t = 0.3$ s.

Ao comparar a solução numérica com a analítica, verificou-se a veracidade do MC.

## Conclusões

Ao trabalhar com o Método das Características observou-se que além de obter a solução numérica, como é de praxe em outros métodos, ele também fornece a solução analítica para a equação hiperbólica. Ao comparar as duas soluções observou-se a eficácia do Método.

## Agradecimentos

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) pelo projeto de iniciação científica.

## Referências

[1] A.M. Lobeiro, Solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões usando o método das características, Universidade Federal do Paraná, 2012.

[2] L.C. Evans, Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics), American Mathematical Society, Vol. 19, 1998.