Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Teorema de Arzelá-Ascoli e Sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias

Wendy Fernanda de Almeida[1]
Marcos Tadeu De Oliveira Pimenta[2]
Departamento da Matemática e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Pres. Prudente, SP

O Teorema de Arzelá-Ascoli constitui-se em um dos resultados centrais da Análise Funcional, devido ao fato de enunciar um critério de compacidade forte para espaços de funções. Esse, ao lado do Critério de Heine-Borel, certamente figuram entre os resultados centrais de compacidade em espaços vetoriais normados. Propomos nesse trabalho enunciar e demonstrar tal teorema, bem como apresentar o Teorema de Peano, o qual afirma a existência de soluções locais para equações diferenciais ordinárias.

Conceitos Iniciais

Teorema 1. *Se E é um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ), as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *E é completo e totalmente limitado.*

(b) *Toda sequência em E tem uma subsequência que converge para um ponto de E.*

(c) *Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por abertos de (X, ρ), existe um conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ cobre E.*

Definição 1. *Um conjunto $E \subset X$ é dito* ***compacto*** *se forem satisfeitas as propriedades* (a) *a* (c) *do Teorema 1. Alem disso o conjunto compacto E é dito* ***relativamente compacto*** *se $\overline{E}$ também for compacto.*

Definição 2. *Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. Definimos o* ***espaço métrico das funções contínuas*** *como sendo a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ com a métrica $\rho(x, y) := max\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}$. Tal espaço métrico é completo, que denotaremos por $\mathcal{C}(X)$.*

Definição 3. *Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções é* ***equilimitado*** *se existir $M > 0$ tal que $|f(x)| < M, \forall x \in X$ e $\forall f \in \mathcal{F}$. Além disso é dita* ***equicontinuo*** *se dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \epsilon, \forall x, x' \in X$ com $\rho(x', x) < \delta$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.*

Resultados

Teorema 2. (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Se (X, ρ) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X)$ é relativamente compacto se, e somente se, é equilimitado e equicontínuo.*

[1]wendy_fda@hotmail.com
[2]pimenta@fct.unesp.br

Demonstração. Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto e suponha que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X)$ seja compacto. Considere $\varepsilon > 0$ e $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tais que:

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i). \tag{1}$$

Ao tomar $f \in \mathcal{F}$ e $x, x' \in X$, para cada $i = 1, \dots, n$, $|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|$. Escolhendo $1 \leqslant j \leqslant n$ tal que $\sup_{x \in X}\{f(x) - f_j(x)\} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, segue que $|f(x) - f(x')| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} + |f_j(x) - f_j(x')|$. Como X é compacto segue que $f_1, \dots, f_n$ são uniformemente contínuas. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implicando que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Como $\rho(x, x') < \varepsilon$, segue que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, para todo $f \in \mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é equicontínua.

Reciprocamente. Suponha que $\mathcal{F}$ seja uniformemente limitada e equicontínua. Pelo fato de ser uniformemente limitada , existe um inteiro $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$, para todo $x \in X$ e para todo $f \in \mathcal{F}$. Pelo fato de ser equicontínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implicando que $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Como X é compacto existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tais que:

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{\varepsilon}(x_i). \tag{2}$$

Tomando um valor positivo natural m tal que $\frac{1}{m} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ e dividindo o intervalo $[-M, M]$ em $2Mm$ intervalos de comprimento $\dfrac{1}{m}$ pelos pontos $-M = y_0 < y_1 < \cdots < y_{2Mm-1} < y_{2Mm} = M$. Considere as n-uplas $(y_{i1}, \dots, y_{in})$ de números y_i, $1 \leqslant i \leqslant 2Mm$, tais que, para algum $f \in \mathcal{F}$, com $1 \leqslant j \leqslant n$ e $f_k \in \mathcal{F}$, para cada n-upla $|f(x_j) - y_{ij}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Se $\mathcal{G} = \{f_1, \dots, f_n\}$ é o conjunto resultante dessa escolha, $\mathcal{G}$ é finito, e é tal que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{G}} \mathcal{B}_{\varepsilon}(f)$. De fato, se $f \in \mathcal{F}$ escolhermos $y_{i1}, \dots, y_{in}$ tal que $|f(x_j) - y_{ij}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ e seja $g \in \mathcal{G}$ de modo que $|g(x_j) - y_{ij}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Seja $x \in X$ e j tal que $\rho(x, x_j) < \varepsilon$. Então:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - y_{ij}| + |y_{ij} - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

Logo $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Portanto, como $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}$ é compacto, segue que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto. ■

Teorema 3. (Teorema de Peano) *Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $x' = f(t, x)$ exite uma solução local passando por (t_0, x_0).*

Referências

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[2] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 2 edition, New York, 1999. .