Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação de Métodos Numéricos na deformação de placas em balanço

Ricardo A. Andreotti[1] Jorge L. N. Góes[2]
Coordenação de Engenharia Civil, COECI, UTFPR, Campo Mourão, PR
Adilandri Mércio Lobeiro[3]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Campo Mourão, PR

1 Introdução

Neste trabalho será solucionado um estudo de caso de uma laje em balanço, que consiste basicamente em uma placa retangular engastada em uma de suas bordas e livre nas outras. A equação que modela a situação apresentada é dada pela Equação Diferencial Parcial (EDP),

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad = \quad \rho(x,y), \tag{1}$$

definida na região $\Omega = \{(x,y) \in (a,b)\times(c,d); a,b,c,d \in \mathbb{R}^+\}$, sendo $D_x = E_x t^3/12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})$, $D_y = E_y t^3/12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})$, $H = (D_x\nu_{yx} + D_y\nu_{xy} + 4D_{xy})/2$ e $D_{xy} = \mathrm{G}_{xy}t^3/6$, onde E_x e E_y são módulos de elasticidade, ν_{xy} e ν_{yx} são os coeficientes de poisson, G_{xy} módulo de cisalhamento, ρ é a carga e t a espessura da placa, sujeita as seguintes condições de contorno [2].

$$\begin{array}{lllll} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(a,y) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(a,y) = 0, & \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(a,y) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(b,y) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(b,y) = 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(b,y) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x,c) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,c) = 0, & \frac{\partial^3 u}{\partial^3 y}(x,c) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x,d) = 0, \\ u(x,d) = 0 & & & & \end{array} \tag{2}$$

A solução do problema será obtida utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF), que consiste em um método numérico no qual discretizará a equação (1) na região $(a,b)\times(c,d)$, onde o eixo das abcissas e ordenadas são divididos, respectivamente, em "M"e "N"partes iguais de comprimento $h = (b-a)/M$ e $k = (d-c)/N$, sendo $x_i = a + (i-1)h$ e $y_j = c + (j-1)k$ em que $i = 1 \cdots M, M+1$ e $j = 1 \cdots N, N+1$ [1].

Substitui-se as fórmulas de diferenças

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,y_j) \quad = \quad \frac{w(x_{i+2},y_j) - 4w(x_{i+1},y_j) + 6w(x_i,y_j) - 4w(x_{i-1},y_j) + w(x_{i-2},y_j)}{h^4} + O(h^2), \tag{3}$$

[1]andreotti@alunos.utfpr.edu.br
[2]jgoes@utfpr.edu.br
[3]alobeiro@utfpr.edu.br

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j) = \frac{w(x_i,y_{j+2}) - 4w(x_i,y_{j+1}) + 6w(x_i,y_j) - 4w(x_i,y_{j-1}) + w(x_i,y_{j-2})}{k^4} + O(k^2) \tag{4}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_j) = & \frac{w(x_{i+1},y_{j+1}) - 2w(x_{i+1},y_j) + w(x_{i+1},y_{j-1}) - 2w(x_i,y_{j+1}) + 4w(x_i,y_j)}{h^2k^2} \\ & \frac{-2w(x_i,y_{j-1}) + w(x_{i-1},y_{j+1}) - 2w(x_{i-1},y_j) + w(x_{i-1},y_{j-1})}{h^2k^2} + O(h^2+k^2) \end{aligned} \tag{5}$$

com $i = 2 \cdots M$ e $j = 2 \cdots N$ na EDP (1) transformando-a num sistema de equações lineares dado

$$\begin{aligned} w_{i,j} = (&-Aw_{i+2,j} - Bw_{i+1,j} - Bw_{i-1,j} - Aw_{i-2,j} - Dw_{i+1,j+1} - Dw_{i+1,j-1} \\ &-Ew_{i,j+1} - Ew_{i,j-1} - Dw_{i-1,j+1} - Dw_{i-1,j-1} - Fw_{i,j+2} - Fw_{i,j-2} + G)/C, \end{aligned} \tag{6}$$

em que $u(x_i, y_j) = w_{i,j}$, $A = k^4 D_x$, $B = -4\left(D_x k^4 + Hh^2k^2\right)$, $C = 6D_x k^4 + 8Hh^2k^2 + 6D_y h^4$, $D = 2Hh^2k^2$, $E = -4\left(Hh^2k^2 + D_y h^4\right)$, $F = D_y h^4$ e $G = \rho h^4 k^4$.

2 Resultados

Obteve-se a solução do sistema (6) por meio do método de Gauss-Seidel empregado em uma rotina escrita em linguagem MatLab, na qual, foi encontrada solução numérica da EDP (1) sujeito as condições de contorno (2). Para um estudo de caso, considerou-se $a = 0$ mm, $b = 2000$ mm, $c = 0$ mm, $d = 1200$ mm, $t = 200$ mm, $M = 8$, $N = 8$, $E_x = 25$ GPa, $E_y = 25$ GPa, $G_{xy} = 10,87$ GPa, $\nu_{xy} = 0,15$, $\nu_{yx} = 0,15$ e $\rho = 0,01$ MPa. O resultado, foi comparado com o *software SAP 2000*, obtendo resultados satisfatórios, conforme apresenta as Figuras 1 e 2, o que mostra a veracidade do método empregado.

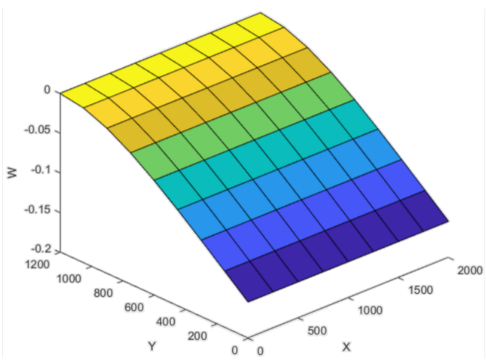

Figura 1: Matlab

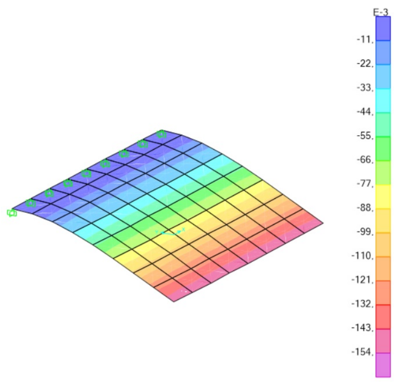

Figura 2: SAP 2000

Referências

[1] R. L. Burden and J. D. Faires, Análise Numérica, *Pioneira Thomson Learning.*, São Paulo, 2003.

[2] A. Cusens and R. Pama, *Bridge Deck Analysis.* [S.I]: *Wiley-Interscience.*, 1975.

