Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Hamiltoniana da Função de Produção MRW

Rafael Aguilar Magalhães[1]
Licenciando em Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Jose Carlos Pereira Coninck[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

Segundo Mankiw [1] o capital humano "é o termo utilizado pelos economistas para designar o conhecimento e as habilidades que os trabalhadores adquirem por meio de educação, treinamento e experiência". Diferentemente do capital físico, o capital humano entra na parte não tangível da análise, pois é mensurado de forma diferente dos outros bens pertencentes às instituições. Nesse trabalho, procuramos escrever a hamiltoniana para uma função de produção cujo valor do capital humano H é descrito em termos da população economicamente ativa e educada. A referência [2] define a construção da variável H pelo tempo médio de anos de escolaridade e retorno à educação.

A função de produção aplicada nesse estudo é o modelo neoclássico MRW[3] [3], definida por:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\beta} [A_t L_t]^{1-\alpha-\beta} \tag{1}$$

onde Y_t é o total de produtividade, K_t é o capital físico, A_t nível de progresso tecnológico, L_t é o trabalho puro ($A_t \cdot L_t$ é o trabalho eficiente), H_t o capital humano e os parâmetros de elasticidade α, β delimitados por $0 < \alpha, \beta$, $\alpha + \beta > 1$. As equações de acumulação de K e H para a função MRW são descritas por:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= S_K Y_t - \delta_K K_t \\ \dot{H} &= S_H Y_t - \delta_H H_t \end{aligned} \tag{2}$$

onde, δ_K e δ_H representam a taxa de depreciação dos capitais físico e humano respectivamente. Também, como componente da equação temos o S_K e S_H que são, respectivamente, o montante de capital físico e humano. A dinâmica da função MRW pode ser descrita pela função de Hamilton,

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t) \tag{3}$$

Para tanto, necessitamos das coordenadas generalizadas a serem encontradas pelas derivadas parciais da função de produção MRW e da função utilidade

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \ln(c(t)) dt, \quad t > 0 \tag{4}$$

[1]aguilarafa2010@gmail.com
[2]coninck@uftpr.edu.br
[3]Criado por N. Gregory Mankiw, David Romer e David N. Weil - 1992

aplicado no modelo de Solow, segundo Tarasyev e Usova [4]. Dessa forma, a função hamiltoniana para o modelo MRW será reescrita em função do capital físico, capital humano educado [2] e da função utilidade, tornando-se

$$\mathcal{H} = f(H, K, \dot{H}, \dot{K}, S_H, S_K, t) \tag{5}$$

Logo, $Y(t) = C(t) + S_K(t)Y(t) + S_H(t)Y(t)$, onde $C(t)$ representa consumo. Como mencionado em [4], a análise do consumo por trabalhador resulta em $c(t) = (1 - s_k(t))(1 - s_h(t))y(t)$. Tomando a função utilidade (4), e as equações de movimento do sistema, partindo da premissa que sistema econômico é fechado por hipótese (supostamente adiabática - não é o caso real), e admitindo a hamiltoniana como sendo $H = T + V$, onde a função utilidade compreende a energia potencial do sistema e as derivadas parciais como a energia cinética. Com base no trabalho de Tarasyev e Usova [4], nós obtemos a forma reduzida para a Hamiltonina do modelo a tempo contínuo para melhor compreensão da dinâmica perturbativa do sistema:

$$\tilde{\mathcal{H}}(s_k, s_h, k, h, \phi_1, \phi_2, t) = e^{-\lambda t} \ln c(t) + \tilde{\phi}_1 \dot{k} + \tilde{\phi}_2 \dot{h} \tag{6}$$

O trabalho ainda está em desenvolvimento, buscando averiguar se as grandezas k e h são invariantes adiabáticos (sob pertubações lentas). Isto é, devemos verificar se o efeito da pertubação sobre modelo MRW em condições ideais, supondo um caso muito específico, torna-se possível mensurar o grau da intensidade da pertubação na hamiltoniana para retirá-la do estado conservativo, ou seja, verificar a estabilidade do modelo. Se a estabilidade do modelo MRW, escrita em termos da variável educada, for sensível à teoria da pertubação dependente do tempo [5] (7):

$$\tilde{\mathcal{H}}(s_k, s_h, k, h, \phi_1, \phi_2, t) \approx \tilde{\mathcal{H}}(s_k, s_h, k, h, \phi_1, \phi_2, t) + \epsilon(h, k) \cdot \hat{\mathcal{H}}(s_k, s_h, k, h, \phi_1, \phi_2, t) \tag{7}$$

então o modelo pode ser reescrito com parâmetros de dissipação equivalente ao caso real.

Referências

[1] N. G. Mankiw. *Introdução à Economia*. Cengage, São Paulo, 2012.

[2] R. C. Feenstra, M. P. Timmer and R. Inklaar. *The Next Generation of the Penn World Table*. American Economic Review, forthcoming. URL http://www.ggdc.net/pwt/

[3] P. Glewwe, E. Maïga and H. Zheng. The Contribution of Education to Economic Growth: A Review of the Evidence, with Special Attention and an Application to Sub-Saharan Africa, *World Development*, Vol. 59, pp. 379?393, 2014

[4] A. M. Tarasyev and A. A. Usova, Construction of a Regulator for de Hamiltonian System in a Two-Sector Economic Growth Model, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, Russia. 2010. ISSN: 0081-5438.

[5] H. Goldstein, H, C. P. Poole and J. L. Safko. *Classical Mechanics* .3rd ed. Addison-Wesley. 2001. p. 680. ISBN 9780201657029.