

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## O Método da Cadeia de Markov Aproximada com Malhas Locais para Problemas de Filtragem Não-Linear

Vitor M. A. Goulart<sup>1</sup>

Leonardo Goliatt<sup>2</sup>

Faculdade de Engenharia, UFJF, Juiz de Fora, MG

Saul C. Leite<sup>3</sup>

Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Considere o problema de filtragem a tempo contínuo em que o modelo para o sistema dinâmico (não-observado) é solução de uma equação diferencial estocástica (EDE):

$$dx(t) = b(x(t))dt + \sigma dW(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

com condição inicial  $x(0)$ , em que  $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma$  é uma matriz  $n \times n$ , e  $W$  um processo de Wiener padrão tomando valor em  $\mathbb{R}^n$ . As observações disponíveis no tempo  $t \geq 0$  são dadas por  $\mathcal{Y}(t) = \{y(s); 0 \leq s \leq t\}$  com  $y$  dado por:

$$dy(t) = g(x(t))dt + \theta d\tilde{W}(t), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

com condição inicial  $y(0) = g(x(0))$ , em que  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\theta$  é uma matriz  $k \times k$  e  $\tilde{W}$  um processo de Wiener padrão tomando valor em  $\mathbb{R}^k$ , independente de  $(x(0), W)$ . O objetivo deste problema de filtragem é determinar esperança condicional de  $x(t)$  dado  $\mathcal{Y}(t)$  a cada instante de tempo  $t > 0$ . Esta esperança condicional é a melhor estimativa para o processo não-observado  $x$  dada a informação atual sobre  $y$  no tempo  $t$ . Tal problema tem inúmeras aplicações práticas, como em sistemas de rastreamento de objetos, em sistemas filas e em finanças [1]. Contudo, exceto em alguns casos particulares (como no caso em que  $b$  e  $g$  são funções lineares), esta esperança condicional não pode ser determinada a partir de cálculos finitos. Desta forma, métodos numéricos são empregados para aproximar esta esperança condicional. Um método muito usado é conhecido como Filtro de Kalman Estendido, que lineariza a dinâmica do sistema em torno da aproximação atual. Apesar de ser muito empregado, é sabido que tal aproximação não gera bons resultados, especialmente quando  $b$  ou  $g$  são altamente não-lineares [1]. Outra aproximação comumente empregada é conhecida como Filtro de Partículas (FP), que define uma aproximação discreta (através de partículas simuladas com a dinâmica de  $x$ ) para a distribuição condicional de  $x$  dado  $y$ .

O método da Cadeia de Markov Aproximada (CMA) também pode ser empregado para aproximar a solução do problema de filtragem não-linear. Este método é baseado na discretização da dinâmica do processo  $x$  (de forma apropriada), gerando uma cadeia de Markov a tempo discreto. Este problema discretizado possui solução exata, que pode

---

<sup>1</sup>vitormgou@gmail.com

<sup>2</sup>leonardo.goliatt@ufjf.edu.br

<sup>3</sup>saul.leite@ufabc.edu.br

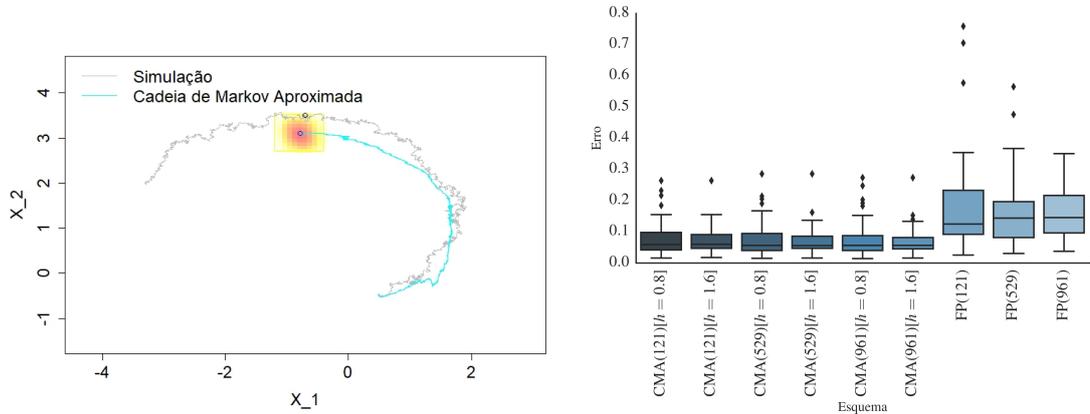


Figura 1: (a) (esquerda) Ilustração da malha local (com distribuição estimada dada pelo mapa de calor) utilizada no método da CMA. (b) (direita) Resultado comparativo do erro médio quadrático para os métodos da CMA com malha local e o Filtro de Partículas (FP).

ser computada através de cálculos finitos. O método é pouco empregado na prática, pois necessita de uma discretização do domínio em que  $x$  está inserido e pode se tornar inviável quando esta discretização gera uma malha com muitos nós. Contudo, cada iteração do método da CMA possui o mesmo custo computacional do que uma iteração do FP, quando o número de pontos na malha discretizada é igual ao número de partículas. Neste trabalho é proposto uma discretização local para a malha, próxima à estimativa atual do processo  $x$ , de forma a reduzir a quantidade de pontos utilizados na malha. O objetivo é gerar uma malha centrada no valor médio da estimativa atual, como ilustrado na Figura 1(a).

Para testar o método proposto, foi considerado o problema estudado em [1], que consiste em encontrar a posição de um navio a partir de um sinal ruidoso. O estado do processo  $x$  que descreve a posição do navio satisfaz a EDE (1) com  $b(x) = (-x_2 + f_1(x), x_1 + f_2(x))^t$ ,  $\sigma = \text{diag}(e_1, e_2)$  em que  $f_i(x) = \varsigma \frac{x_i}{|x|^2} - \Theta \frac{x_i}{|x|} 1_{(\varrho, \infty)}(|x|)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $1_{(\varrho, \infty)}(|x|)$  é a função indicadora do conjunto  $(\varrho, \infty)$ , e  $\varsigma$ ,  $\varrho$  e  $\Theta$  são parâmetros reais positivos. As observações dos sinais são coletadas em intervalos de tempo de tamanho  $dh = 0.001$  através de uma aproximação a tempo discreto de (2) com  $g(x_1, x_2)dh = \arctan(x_2/x_1)$  e  $\theta\sqrt{dh} = 0.32$  como usado em [1]. O método de Euler-Maruyama foi usado para gerar as simulações de  $x$  com os valores dos parâmetros  $\varsigma = 2$ ,  $\Theta = 50$ ,  $\varrho = 9$ ,  $x(0) = (0.5, -0.5)^t$ ,  $e_1 = e_2 = 0.4$  no intervalo de tempo  $[0, 3]$ . O resultado da CMA com malha local foi comparado com o filtro de partículas com reamostragem. A Figura 1(b) mostra o resultado de 30 simulações com número de pontos/partículas variando no conjunto  $\{121, 529, 961\}$ . Para o CMA, usou-se uma malha quadrada de lados  $h \in \{0.8, 1.6\}$ . Com os resultados é possível concluir que o método da CMA com malha local gera melhores resultados do que o FP com um número de pontos na malha menor do que o número de partículas utilizado.

## Referências

- [1] A. Budhiraja, L. Chen, and C. Lee, A survey of numerical methods for non-linear filtering problems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 230:27–36, 2007. 10.1016/j.physd.2006.08.015