Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Análise diferencial do problema de deflexão para viga biapoiada sujeita a uma carga uniforme a partir do Método de Diferenças Finitas

Caroline Galvão Toscano[1]
Discente do Curso de Engenharia Civil, UFERSA, Mossoró, RN
Matheus da Silva Menezes[2]
Ivan Mezzomo[3]
Anderson Wallace Paiva do Nascimento[4]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

Através de equações diferenciais podemos descrever e estimar fenômenos ou sistemas de forma precisa, nos fornecendo uma formulação simplificada do processo real, ou seja, a modelagem do sistema. Este trabalho objetiva apresentar a modelagem e aplicação das equações diferenciais no estudo de deflexão de vigas, através de um estudo computacional do Método das Diferenças Finitas, analisando suas aproximações numéricas. Considere o seguinte problema de valor de contorno (PVC):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(x); y(a) = \alpha; y(b) = \beta \tag{1}$$

onde α e β são dados.

O Método de Diferenças Finitas consiste em substituir cada uma das derivadas da equação por uma aproximação dada a partir da expansão de y em um polinômio de Taylor de terceira ordem para malhas uniformes e de segunda ordem para malhas não-uniformes, fazendo as devidas simplificações e desconsiderando o erro de truncamento, temos:

$$y_(i-1) - 2y_i + y_(i+1) = h^2 r(x_i) \tag{2}$$

$$h_i y_{i-1} - (h_{i-1} + h_i) y_i + h_{i-1} y_{i+1} = \frac{(h_{i-1} + h_i) h_{i-1} h_i}{2} r(x_i) \tag{3}$$

sendo (2) para malhas uniformes e (3) para malhas não-uniformes. A partir da equação e de suas condições de contorno, é definido um sistema de equações lineares que é expresso na forma de matriz tridiagonal $N \times N$, onde a aproximação para y é dada pelos pontos que são solução do sistema $Ay = b$ [1].

---

[1]caroltoscanocn@hotmail.com
[2]matheus@ufersa.edu.br
[3]imezzomo@ufersa.edu.br
[4]anderson.wallace@live.com

O problema de deflexão em uma viga biapoiada com seção transversal retangular, sujeita a uma carga uniforme, resulta em um problema de valor de contorno do tipo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qx}{2EI}(x-L); y(0) = 0; y(L) = 0 \tag{4}$$

onde q é o carregamento externo, L é o comprimento da viga e EI rigidez a flexão da viga.

Para o estudo, foi considerada uma viga biapoiada, com seção transversal retangular $15cm$ x $25cm$, resistência característica do concreto a compressão (fck) de $20MPa$, comprimento de $5m$ e carregamento distribuído de $10KN/m$. Foram utilizadas malhas uniformes e não-uniformes com 80% dos pontos concentrados entre $0,4L$ e $0,6L$, sabendo que o que importa para a análise estrutural é a deflexão máxima da viga, que para esse caso se encontra em $0,5L$. Os cálculos para malhas não-uniformes foram feitos de duas formas, uma com a equação(3)(M.N.U-1) e outra com a equação (2)(M.N.U-2), utilizando como PVC a solução analítica nos pontos $0,4L$ e $0,6L$. Para ambos os casos variamos o número de nós das malhas entre 50, 100, 500 e 1000. Para verificar a qualidade do resultado calculamos o erro médio absoluto de cada discretização em relação a solução analítica. Os resultados alcançados são exibidos a seguir:

Tabela 1: Resultados dos experimentos

Tipos de Malha		**Número de nós**			
		50	100	500	1000
MU	$erro_{(0-0,4L)}$	$1,06E-05$	$2,64E-06$	$1,05E-07$	$2,61E-08$
	$erro_{(0,4L-0,6L)}$	$2,13E-05$	$5,27E-06$	$2,09E-07$	$5,22E-08$
	$erro_{(0,6L-L)}$	$1,06E-05$	$2,64E-06$	$1,05E-07$	$2,61E-08$
	$erro_{(total)}$	$4,26E-06$	$1,05E-06$	$4,18E-08$	$1,04E-08$
MNU-1	$erro_{(0-0,4L)}$	$1,83E-03$	$3,62E-04$	$1,22E-05$	$3,00E-06$
	$erro_{(0,4L-0,6L)}$	$2,28E-04$	$4,52E-05$	$1,53E-06$	$3,75E-07$
	$erro_{(0,6L-L)}$	$1,83E-03$	$3,62E-04$	$1,22E-05$	$3,00E-06$
	$erro_{(total)}$	$1,83E-04$	$3,62E-05$	$1,22E-06$	$3,00E-07$
MNU-2	$erro_{(0-0,4L)}$	$2,51E-05$	$5,89E-06$	$2,19E-07$	$5,42E-08$
	$erro_{(0,4L-0,6L)}$	$3,14E-06$	$7,36E-07$	$2,74E-08$	$6,77E-09$
	$erro_{(0,6L-L)}$	$2,51E-05$	$5,89E-06$	$2,19E-07$	$5,42E-08$
	$erro_{(total)}$	$2,51E-06$	$5,89E-07$	$2,19E-08$	$5,42E-09$

Os resultados mostram que quanto maior a discretização da malha, menor o erro médio absoluto. Já quanto ao tipo de malha utilizada, os resultados foram mais favoráveis para malhas uniformes, isso pode ser explicado devido a expansão em série de Taylor utilizada que apresenta um menor erro de truncamento.

Referências

[1] R. L. Burden, D. J. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica*. Cengage, São Paulo, 2016

[2] R. C. Hibbeler. *Resistência dos Materiais*. 7 ed., Pearson, CIDADE, 2009.