Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Análise diferencial da vibração livre com amortecimento viscoso de um sistema massa-mola

Igor Ramon Bezerra de Freitas[1]
Leonardo da Silva Rebouças[2]
Matheus da Silva Menezes[3]
Ivan Mezzomo[4]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

Nas ciências e na engenharia, modelos matemáticos são desenvolvidos para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos [1]. Uma importante aplicação na engenharia, é a análise de vibrações, que ao longo do avanço tecnológico, e consequentemente da indústria, diversos problemas surgiram decorrentes desse fenômeno, um exemplo disso ocorreu com a ponte de Tacoma Narrows (1940). Apesar de seus efeitos danosos, a vibração pode ser utilizada a favor em várias aplicações industrias e de consumo [2]. O presente trabalho busca utilizar o método dos coeficientes constantes para encontrar a solução da equação diferencial que descreve o comportamento do sistema massa-mola com amortecimento.

Para um sistema massa-mola que sofre deslocamento em um único eixo e que, o fluido de amortecimento exerce uma força restauradora de módulo proporcional a sua velocidade na forma: $F = -c(dx/dt)$, aplicando a segunda lei de Newton obtem-se equação diferencial do sistema:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{1}$$

O método dos coeficientes constantes consiste em supor que uma das soluções da equação acima é dada por: $x(t) = e^{st}$, onde $s$ é uma constante. Derivando e substituindo na Equação 1 encontramos a equação auxiliar $ms^2 + cs + k = 0$, que se tratando de uma equação de segundo grau existem três casos possíveis para sua solução [3]. A Tabela 1 ilustra esses casos com suas respectivas soluções gerais.

Tabela 1: Solução geral da equação diferencial para cada caso.

| Caso | Solução geral | Classificação |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $x(t) = c_1 e^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} + c_2 e^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}$ | Sistema superamortecido |
| $\Delta = 0$ | $x(t) = c_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{c}{2m}t}$ | Sistema crítico |
| $\Delta < 0$ | $x(t) = c_1 e^{\frac{-c}{2m}t}\cos(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t) + c_2 e^{\frac{-c}{2m}t}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}t)$ | Sistema subamortecido |

[1]igorramon25@gmail.com
[2]leosilvar15@gmail.com
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]imezzomo@ufersa.edu.br

 

O sistema superamortecido apresenta um comportamento suave e não oscilatório, onde para $t \to \infty$, $x(t)$ tende a zero. No sistema criticamente amortecido o seu movimento também é aperiódico, entretanto, diferentemente do sistema superamortecido $x(t)$ tende a zero em um intervalo de tempo muito menor. O movimento do sistema subamortecido é oscilatório e devido ao fator exponencial, $x(t)$ diminui com o tempo até a posição zero.

Para comprovar a funcionalidade do método, selecionou-se três problemas teóricos que abordam os diferentes casos que podem ser obtidos como solução do sistema massa-mola com amortecimento, e em seguida foi utilizado o software *Excel* para descrever o comportamento gráfico de cada problema. A Tabela 2 apresenta esses problemas e suas respectivas soluções, considerando as mesmas condições inicias para cada problema, sendo: $x(0) = 0,15$ e $x'(0) = 0$.

Tabela 2: Problemas teóricos e suas soluções

| Problema | Solução |
|---|---|
| $1,2\frac{d^2x}{dt^2} + 100\frac{dx}{dt} + 180x = 0$ | $x(t) = 0,1535e^{-1,8406t} - 0,003466e^{-81,4927t}$ |
| $1,2\frac{d^2x}{dt^2} + 12\sqrt{6}\frac{dx}{dt} + 180x = 0$ | $x(t) = 0,15e^{-5\sqrt{6}t} + 1,8371te^{-5\sqrt{6}t}$ |
| $1,2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 180x = 0$ | $x(t) = 0,15e^{-1,25t}\cos 12,1835t + 0,01539e^{-1,25t}\,\mathrm{sen}\,12,1835t$ |

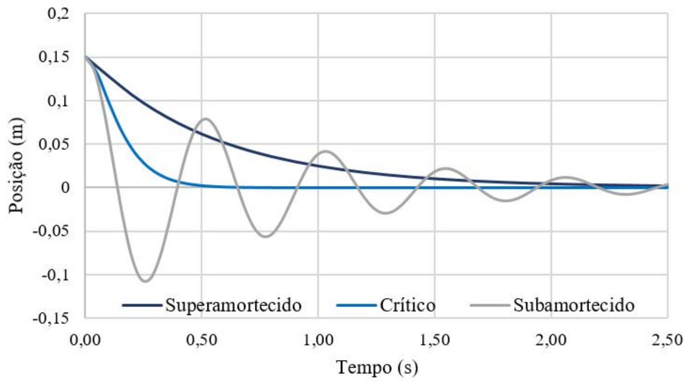


Figura 1: Comportamento das soluções dos problemas teóricos. (Autoria própria)

Como pode-se perceber, as soluções dos problemas teóricos apresentaram comportamento previsto em teoria, sendo assim podemos validar o métodos dos coeficientes constantes para encontrar as soluções do sistema massa-mola com amortecimento viscoso.

## Referências

[1] R. K. Nagle, E. B. Saff, and A. D. Snider. *Equações Diferenciais.* 8 ed., Pearson, São Paulo, 2012.

[2] S. S. Rao. *Vibrações Mecânicas.* 4 ed., Pearson, São Paulo, 2008.

[3] D. G. Zill. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem.* 9 ed., Cengage Learning, São Paulo, 2011.