Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Bifurcação de Hopf como Coexistência entre Populações de Moscas em um Modelo Presa-Predador

Patrick Oliveira [1]
Departamento de Matemática, UFJF, Juiz de Fora, MG
Lucy Takahashi[2]
Departamento de Matemática, UFJF, Juiz de Fora, MG

Neste trabalho consideramos um modelo presa-predador, baseado no modelo de *Lotka-Volterra* 1925, em que por Equações Diferenciais Autônomas descrevemos a interação de duas moscas (1), *Phyllocnistis citrella* e *Galeopsomya fausta* [4], em uma relação predatória, onde a mosca predada é uma praga comum em plantações extensivas de árvores de frutos cítricos, como a laranja. Nosso objeto é compreender como estas populações se comportam com o tempo, afim de que possamos entender se o controle populacional dessa praga, feito através da introdução de um predador, surte efeito.

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} &=& \phi_1(1-\frac{M}{c_1})M-(\alpha_1+\beta_1)P-k_1PG \\ \dfrac{dM}{dt} &=& \alpha_1P-\mu_1M \\ \dfrac{dL}{dt} &=& \phi_2(1-\frac{G}{c_2})G-(\alpha_2+\beta_2)L+k_2PG \\ \dfrac{dG}{dt} &=& \alpha_2L-\mu_2G \end{cases} \tag{1}$$

Na equação (1) foi considerado a coexistência entre as populações das duas moscas. Em razão da predação da mosca *Galeopsomyia fausta* ocorrer na sua forma larval, alimentando-se das pupas da *Phyllocnistis citrella*, dividimos a população total do modelo em 4 subpopulações: tomamos por P e M as densidades de pupas e adultos fêmeas da mosca *Phyllocnistis citrella*, e tomamos L e G como as densidades das larvas e adultos fêmeas da mosca *Galeopsomyia fausta*. Ainda, temos que α_1 é a taxa de pupas P que originam adultos M, β_1 e μ_1 são as taxas de mortalidade de P e M, respectivamente, ϕ_1 é a taxa de ovos que originam P e c_1 é a capacidade de suporte da população M. De forma parecida, α_2 é a taxa de larvas L que originam adultos G, β_2 e μ_2 são as taxas de

[1]patrickoliveira@ice.ufjf.br
[2]lucy.takahashi@ice.ufjf.br

mortalidade de L e G, respectivamente, ϕ_2 é a taxa de oviposição de G e c_2 é a capacidade de suporte da população G.

Como abordagem para o modelo proposto [4], que podemos ver na equação (1), escolhemos estudá-lo através do método de Análise Qualitativa [1]. Ainda, consideramos dois parâmetros k_1 e k_2 neste modelo (ambos relacionados a taxas de variação de duas subpopulações das moscas em relação a um encontro entre a presa e o predador), dessa forma o estudo passa a ser em função de uma região S no plano com valores admissíveis para os parâmetros.

Percebe-se então que esta região S divide-se em três sub-regiões, onde em duas delas podemos aplicar o estudo da Análise Qualitativa, verificando assim qual é a estabilidade das soluções naquela sub-região, entretanto, na terceira sub-região faz-se necessário o estudo da Bifurcação de Hopf [2]. Assim, conseguimos determinar o comportamento estável das populações de moscas para os valores dos parâmetros sobre esta última sub-região.

É necessário primeiramente, para determinarmos o comportamento das soluções, estudarmos a estabilidade dos seus pontos de equilíbrio [1]. Para as duas primeiras sub-regiões, através do método de Análise Qualitativa, podemos checar a estabilidade das soluções explicitamente. Todavia, para a terceira sub-região, verificamos numericamente que seus pontos satisfazem as condições de existência de uma Bifurcação de Hopf (são estas, a condição de transversalidade e a de não degenerescência [3, 4]).

Deste modo, comprovamos a formação de uma Bifurcação de Hopf na forma de um ciclo limite estável [2, 4] para os parâmetros sobre a terceira sub-região, comprovamos também que a relação entre as populações de moscas em duas das sub-regiões é estável, logo duradoura. Ou seja, mesmo em uma relação predatória, as quantidades de presas e predadores não caminham à extinção, mas sim oscilam seus valores continuamente. Este resultado confirma a nossa expectativa inicial da possibilidade de refreamento da praga através da inserção de um predador natural, o que é um método de controle com largas vantagens em relação ao tradicional uso de agrotóxicos.

Referências

[1] A. Panfilov, *Qualitative Analysis of Differential Equations*, Utrecht University, Utrecht, 2010.

[2] S. Marée and A. Panfilov, *Non-Linear Dynamical Systems*, Utrecht University, Utrecht, 2005.

[3] A. L. Vieira, Bifurcação de Hopf em um Modelo para a Dinâmica do Vírus Varicela-Zoster, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UFV, (2011).

[4] J. Sotomayor, Bifurcation analysis of a model for biological control, *Math. and Comp. Model.*, 48.3 : 375-387, 2008.