Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Uso de Corpos Quadráticos na Construção de Bons Códigos

Victor Passarelli Destefane [1]
Matemática, UNESP, Rio Claro, SP
William Lima da Silva Pinto [2]
Matemática, UNESP, Rio Claro, SP
Carina Alves[3]
Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

Transmitir dados pelo meio atmosférico envolve muitos problemas inerentes a esse meio, como diferença de temperatura entre camadas da atmosfera, fenômenos meteorológicos, bloqueios causados por construções, pessoas, animais e outros objetos que estejam no caminho de propagação do sinal e fazem com que ele se enfraqueça, além da perda natural de energia que ocorre durante a propagação da onda.

Um tipo de sistema que tem sido bastante utilizado e visto como muito promissor é o MIMO (do inglês, *Multiple Input Multiple Output*) que consiste no uso de múltiplas antenas para envio e recebimento de sinal. Os sistemas de comunicação MIMO estão sendo amplamente explorados principalmente por fornecer ganhos na transmissão de sinal.

Para maximizar os ganhos tanto de diversidade quanto de multiplexação foram introduzidos os Códigos de Bloco Espaço-Temporais (STBC). Nesse contexto, as álgebras de divisão desempenham um importante papel, pois produzem naturalmente famílias de códigos com diversidade máxima, permitindo assim projetar códigos espaço-temporais confiáveis. Neste trabalho, vamos construir bons códigos espaço temporais com duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras e para isso vamos utilizar corpos quadráticos totalmente imaginários e álgebra dos quatérnios.

1 Código de bloco espaço-temporal quadrático

Dentre os códigos construídos para duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras podemos citar como exemplo, o código de Ouro (Golden Code) e o código de prata (Silver Code) que são construídos usando as álgebras dos quatérnios $(5, i)_{\mathbb{Q}(i)}$ e $(-1, -1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})}$, respectivamente.

Neste trabalho apresentamos uma outra estrutura de STBC, chamada de Código de Bloco Espaço-Temporal Quadrático, a qual descrevemos abaixo.

[1] victorpassarelli5@gmail.com
[2] william26535@hotmail.com
[3] carina@rc.unesp.br

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo de números, $x^2 + px + q$ um polinômio irredutível sobre $\mathbb{F}$, com $p, q \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$, o anel de inteiro de $\mathbb{F}$. O polinômio $x^2 + px + q$ tem duas raízes, sendo estas;

$$\alpha_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \notin \mathbb{F} \text{ e } \alpha_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \notin \mathbb{F}.$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{F}(\alpha_1)$, então $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = 2$ e $\{1, \alpha_1\}$ é uma base de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{F}$. Sejam σ_1 e σ_2, os dois mergulhos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{C}$ que fixam $\mathbb{F}$ e $\sigma_1(\alpha_1) = \alpha_1, \sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$.

Um código de bloco espaço-temporal quadrático(QSTBC) $\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, baseado em um polinômio quadrático irredutível $x^2 + px + q \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}[x]$ sobre $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é um corpo de números, é definido por $\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) =$

$$\left\{ X = \begin{pmatrix} x_1(1) + x_1(2)\alpha_1 & x_2(1) + x_2(2)\alpha_1 \\ \gamma(x_2(1) + x_2(2)\alpha_2) & x_1(1) + x_1(2)\alpha_2 \end{pmatrix} \mid x_k(1), x_k(2) \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}, k = 1, 2 \right\}, \quad (1)$$

onde $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ é um número escolhido de forma que $\gamma \neq N_{\mathbb{F}(\alpha_1)/\mathbb{F}}(x)$, para todo $x \in \mathbb{F}(\alpha_1)$.

Sejam $\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ um reticulado complexo sobre $\mathcal{O}_{\mathbb{F}} \times \mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ com matriz geradora L, M uma matriz geradora do reticulado obtido via $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$.

Denotemos $g_{prod}(\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)) = |det(L)||det(M)|^2$. Dizemos que $\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1)$ é melhor que $\mathcal{C}(\mathbb{K}, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ se

$$g_{prod}(\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1)) \leq g_{prod}(\mathcal{C}(\mathbb{K}, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)). \quad (2)$$

A fim de verificar quais QSTBC apresentam maior ganho de codificação, usamos a desigualdade (2). A estrutura de códigos de bloco espaço-temporais $\mathcal{C}(\mathbb{F}, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ apresentada neste trabalho é baseada no artigo [3].

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial (PET) e à minha orientadora, Profa. Dra. Carina Alves, pela ajuda e incentivo.

Referências

[1] M. O. Damen, A. Tewfik and J.-C. Belfiore. A construction of a space-time code based on number theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48 (3):3753-760, 2002.

[2] G. Wang and X.-G. Xia. On optimal multilayer cyclotomic spacetime code designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51 (3):1102-1135, 2005.

[3] G. Wang, J.K. Zhang and M. Amin. Space-time block code designs based on quadratic field extension for two-transmitter antennas. *IEEE Transaction on Information Theory*, 58 (6):4005-4013, 2012.