Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Estudo preliminar sobre a condição de admissibilidade para funções wavelet de Morlet e similares

Alexandre A. C. Lopes Suzuki[1]
Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP
Cláudia Aline A. S. Mesquita [2]
Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP
Margarete Oliveira Domingues[3]
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, São José dos Campos, SP

Há muitas origens para a análise wavelet como desenvolvida atualmente. Em especial, a origem do termo wavelet provém de uma delas que é baseada nas ideias do Geofísico francês Jean Morlet (para maiores informações veja [1, 4]). Esse geofísico idealizou uma função wavelet, afim de analisar aspectos tempo-escala de sinais geofísicos. Na teoria, funções wavelet devem obecedecer duas propriedades: condição de admissibilidade e de energia unitária. Do ponto de vista teórico, as funções geradas por Morlet não obedecem exatamente a condição de admissibilidade, mas por serem funções analíticas, podem ser utilizadas, em circunstâncias práticas, como base da Transformada Wavelet Contínua (CWT).

Formalmente, a condição de admissibilidade pode ser expressa por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\ \mathrm{d}t = 0. \tag{1}$$

Essa condição também pode ser verificada diretamente no domínio de Fourier,

$$0 < C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}\ \mathrm{d}\omega < \infty \tag{2}$$

em que Ψ é a transformada de Fourier da função ψ e o valor de C_ψ é um importante parâmetro a ser utilizado na construção da transformada inversa [2].

Neste trabalho analisa-se as duas formas da função wavelet de Morlet descritas a seguir. A forma mais popular na área de sinais

$$\psi(t;\omega_0) = K \exp(\imath\, \omega_0 t)\ \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \qquad K = \pi^{-\frac{1}{4}}, \tag{3}$$

---

[1]alexandre.suzuki@outlook.com
[2]caas.mesquita@unifesp.br
[3]margarete.domingues@inpe.br

e a forma completa que é expressa por

$$\psi(t;\omega_0) = K \left[\exp\left(\imath\omega_0 t\right) - \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \qquad K = \pi^{-\frac{1}{4}} \tag{4}$$

A forma apresentada na Equação 3 não satisfaz diretamente a condição de admissibilidade. Mesmo não satisfazendo exatamente, ainda assim essa função é chamada wavelet, pois, para valores de $\omega_0 > 5$, a integral analisada se aproxima de zero (ordem de $10 \cdot 10^{-5}$), como pode ser visto na Tabela 1. Então, para propósitos práticos, essa função pode ser utilizada como uma função wavelet analítica.

Tabela 1: Valores obtidos da integração da função wavelet (3) referente ao parâmetro ω_0

ω_0	0	3	4	5	6
$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t;\omega_0)\mathrm{d}t$	1.88279253	0.20915935	0.000631654	0.00000702	0.00000003

Neste estudo inicial, apresenta-se algumas funções wavelet de Morlet e sob que condições elas se aproximam da condição de admissibilidade. Este estudo em desenvolvimento pretende avaliar a restauração da condição de admissibilidade em funções wavelets, como proposto em [3], na tentativa de averiguar como a transformada inversa pode ser definida em casos em que a restauração é necessaria.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro das agências CNPq (proj. $306038/2015-3$ e bolsa PIBIC/UNIFESP-SP) e FAPESP (proj. $2015/25624-2$).

Referências

[1] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S. T. Ali. *Applications of the 2-D CWT. I: image processing.* Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511543395.005.

[2] M. Domingues, O. Mendes, M. Kaibara, V. Menconi, and E. Bernardes. Explorando a transformada wavelet contínua. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38, 00 2016. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0019.

[3] P. Frick, A. Grossmann, and P. Tchamitchian. Wavelet analysis of signals with gaps. *Journal of Mathematical Physics*, 39(8):4091–4107, 1998.

[4] J. Morlet. *Sampling Theory and Wave Propagation.* NATO ASI Series, Issues in Acoustic Signal/Image Processing and Recognition. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Chen, C. H. ed.