Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Escoamento Bifásico com Gravidade em um Meio Poroso

Isamara Landim Nunes Araujo[1]
UFF, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia - MCCT, Volta Redonda, RJ
Panters Rodríguez Bermúdez[2]
UFF, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia - MCCT, Volta Redonda, RJ
Yoisell Rodríguez Núñez[3]
UFF, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia - MCCT, Volta Redonda, RJ

Neste trabalho estudamos o escoamento de dois fluidos imiscíveis, água e óleo, em um meio poroso na direção vertical sob a ação da gravidade. Foram considerados as seguintes hipóteses: o escoamento é isotérmico, a porosidade do meio é constante, os fluidos ocupam todo o espaço poroso da rocha, os efeitos de compressibilidade das fases e da rocha e os efeitos de pressão capilar entre as fases são desprezados [1]. Este problema é modelado pela seguinte lei de conservação:

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(F(s_w)) = 0, \quad \text{onde} \quad F(s_w) = \frac{s_w^2}{s_w^2 + \mu(1-s_w)^2}\left[v + (1-s_w)^2\mu(1-\rho)\right]. \tag{1}$$

s_w representa a saturação da água, $\mu = \mu_w/\mu_o$ e $\rho = \rho_o/\rho_w$. O parâmetro v esta relacionado aos gradientes de pressão.

As soluções numéricas serão obtidas através de métodos de diferenças finitas na sua forma conservativa. Utilizaremos os métodos clássicos Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff Modificado [3]. Um esquema de diferenças finitas conservativo tem a forma [2]

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{k}{h}[G(u_j^n, u_{j+1}^n) - G(u_{j-1}^n, u_j^n)], \tag{2}$$

onde o fluxo numérico G é definido para cada esquema, como segue

1. Método Lax-Friedrichs

$$G(u_{j-1}^n, u_j^n) = \frac{1}{2}(f_{j-1} + f_j) - \frac{1}{2\nu}(u_j^n - u_{j-1}^n). \tag{3}$$

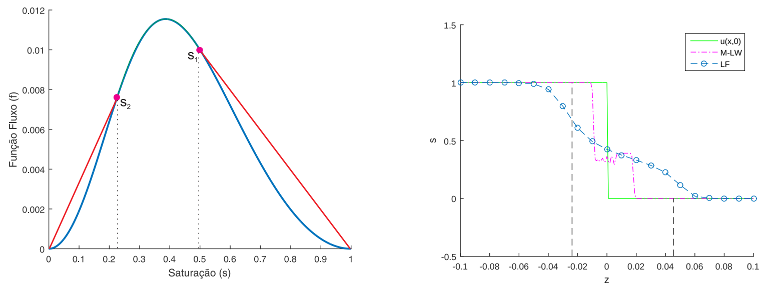
2. Método de Lax-Wendroff

$$G(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2}\left[f_{j+1} + f_j - \frac{1}{\nu}(\lambda_{j+1/2})^2\Delta_+ u_j^n\right]. \tag{4}$$

Para detalhes veja [1,2]. Em particular o método LW produz aproximações que não convergem para a solução entrópica sendo então necessária a adição de um termo ao esquema, denominado viscosidade não linear [3].

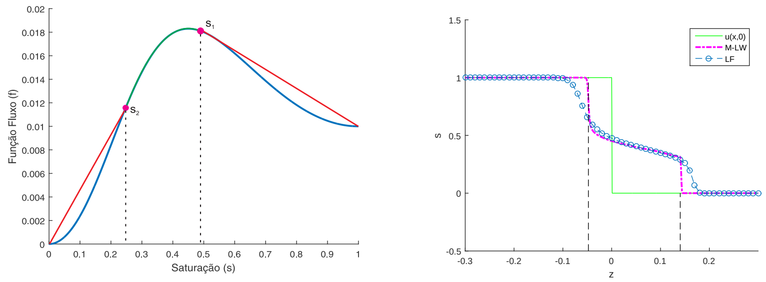
[1]isamara-landim@hotmail.com
[2]pantersrb@id.uff.br
[3]yoisellrn@id.uff.br

© 2018 SBMAC



(a) Construção de Oleinik. (b) Resultados numéricos.

Figura 1: Caso puramente gravitacional, $v = 0$. Dados de Riemann $s_l = 1$, $s_r = 0$. Para este caso têm-se $t = 1$, CFL$= 0.14$, $\mu = 0.25$ e $\rho = 0.8$.



(a) Construção de Oleinik. (b) Resultados numéricos.

Figura 2: Caso com gravidade dominante, $v = 0.01$. Dados de Riemann $s_l = 1$, $s_r = 0$. Para este caso têm-se $t = 3$, CFL$= 0.14$, $\mu = 0.25$ e $\rho = 0.8$.

Como mostrado nas figuras 1b e 2b o método Lax-Friedrichs apresenta um comportamento difusivo, enquanto o Lax-Wendroff apresenta um comportamento dispersivo. As oscilações espúrias do método de Lax-Wendroff, que aparecem na captura dos choques, podem causar erros nas rarefações antes ou depois do mesmo, tornando este esquema menos eficiente do que os outros em alguns casos. Nas figuras 1a e 2a foram apresentadas as construções de Oleinik, usando as funções de fluxos de cada problema, que permite obter de maneira qualitativa as soluções analíticas. Os segmentos vermelhos representam as ondas de choque, enquanto a cor verde sobre a função de fluxo representa ondas de rarefações e os pontos de junção na cor rosa são os estados característicos.

Referências

[1] I. L. N. Araujo, Métodos numéricos de diferenças finitas para leis de conservação: aplicação ao escoamento bifásico de água e óleo com gravidade em um meio Poroso, Monografia, UFF, 2017.

[2] D. Kröner. *Numerical Schemes for Conservation Laws*. Wiley-Teubner Series, Advances in Numerical Mathematics, 1997.

[3] A. Madja and S. Osher. Numerical viscosity and the entropy condition. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32:797-838,1979.

 © 2018 SBMAC