Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma ferramenta para o estudo de comportamento assintótico

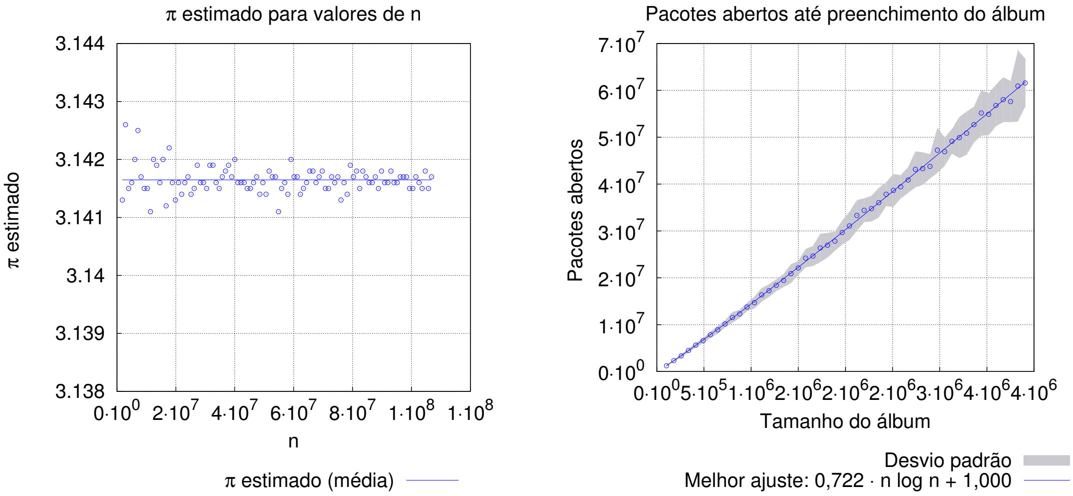
Raquel Marcolino de Souza[1]
Fabiano de Souza Oliveira[2]
Paulo Eustáquio Duarte Pinto[3]
Instituto de Matemática e Estatística, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

O estudo empírico é a pesquisa realizada a partir de evidências coletadas através de observação e experimentação, parte integrante do método científico. Enquanto em áreas do conhecimento o estudo empírico é a norma, em áreas dentro da Matemática, como o estudo da Teoria da Computação, o método analítico é o meio principal de obtenção de explicações para os "fenômenos" dos produtos derivados de suas teorias, quando não o único meio considerado legítimo. O método empírico, contudo, tem um papel coadjuvante ainda importante. Quando um fenômeno possui uma certa complexidade de estudo, a análise empírica propicia meios de abrir novos caminhos, de apontar direções ou de reforçar intuições. Ele pode ser usado também como forma de obter respostas de maneira alternativa e mais simples, sacrificando normalmente precisão, eficiência ou correção absoluta.

A ferramenta EMA [3] tem por finalidade determinar a complexidade assintótica de algoritmos. Embora seja esta a motivação apresentada originalmente pelo autor, a ferramenta pode ser usada de maneira mais geral para se estudar comportamento assintótico de funções. Com efeito, ela pode ser usada para se determinar o comportamento assintótico de funções cuja forma fechada seja de difícil obtenção analítica e que seja de fácil avaliação por meio de algoritmos. Como ilustração, considere o cálculo da constante matemática $\pi = 3,14159....$ Ao longo dos séculos, foram criadas diversas fórmulas para π, exatas ou com graus variados de aproximação, muitas delas consistindo de séries infinitas [1]. Existe, no entanto, uma maneira de obter uma aproximação de π como descrito a seguir. Sorteie dois números x, y uniformemente no intervalo real $[0; 1)$ e considere o ponto Q de coordenadas (x, y). A probabilidade p de que Q pertença ao círculo com centro na origem e raio unitário é dada pela razão da quarta parte da área de tal círculo pela área de um quadrado de lado unitário, isto é, $p = \pi/4$. Se a pertinência ao círculo é considerada uma variável aleatória X de Bernoulli, na qual "sucesso" corresponde a pertinência ao círculo, temos que o valor esperado do número de pontos Y dentro do círculo em n leituras de X é dado por $E[Y] = np = n\pi/4$, ou seja, $\pi = 4E[Y]/n$. Um estimador $\hat{\pi}$ para π portanto é $\hat{\pi} = 4n_{\leq}/n$, onde n é o número de sorteios de ponto usados numa simulação e $n_{\leq}$ é o número deles com distância euclidiana à origem menor ou igual a 1. A Figura 1(a) ilustra o processo de simulação, usando EMA, e mostra uma rápida convergência de $\hat{\pi}$ para o

[1]raquelmarcolino25@gmail.com
[2]fabiano.oliveira@ime.uerj.br
[3]pauloedp@ime.uerj.br

valor de π. Com relação à acurácia, em nossos experimentos, a média dos valores $\hat{\pi}$ foi precisa em 3 casas decimais em relação ao valor real de π.



(a) (b)

Figura 1: Relações entre (a) π estimado e (b) pacotes abertos, obtidos empiricamente.

Como segundo exemplo, considere o problema do *colecionador de figurinhas* (*Coupon Collector's Problem*). Neste problema, abrem-se pacotes de figurinhas, cada pacote com uma única entre n possíveis (todas equiprováveis), até que um álbum seja preenchido por completo. O interesse é determinar o número esperado de pacotes para o preenchimento do álbum. É possível mostrar, com o uso de série harmônica, que tal número esperado é $n(\gamma + \log n)$, onde $\gamma \approx 0,57722$ é a constante Euler–Mascheroni [2]. Considere, agora, o seguinte processo de solução do problema acima: simule o processo iterativo de sortear um inteiro entre 1 e n e pare quando n números distintos forem sorteados. Uma simulação do processo de preenchimento com 30 amostras para cada valor de n resulta, utilizando a ferramenta EMA, que a complexidade assintótica da função que faz corresponder cada valor de n com o número médio de pacotes abertos até o preenchimento é $\Theta(n \log n)$, consistente com o método analítico e obtida de forma simples (ver Figura 1(b)).

A aplicação do EMA para a determinação do comportamento assintótico de funções que podem ser facilmente avaliadas por algoritmos constitui um importante auxílio para guiar os esforços analíticos na obtenção das respectivas formas fechadas.

Referências

[1] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, The computation of classical constants. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States*, 86:8178–8182, 1989.

[2] R. Motwani, P. Raghavan, *Randomized algorithms*. Chapman & Hall/CRC, London, 2010.

[3] F. S. Oliveira, EMA. Disponível em: <`http://fabianooliveira.ime.uerj.br/ema`>. Acesso em: 13 jun. 2018.

