Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução Numérica da Equação de Burgers Viscosa pelo Método de Lattice-Boltzmann

Vinícius Pessoa Mapelli[1]
Luiz Eduardo Czelusniak[2]
Luben Cabezas-Gómez[3]
Escola de Engenharia de São Carlos, USP

Nas últimas décadas, o método de Lattice-Boltzmann (MLB), ou Boltzmann em rede, tem ganhado um certo destaque como um método numérico alternativo e promissor para a solução de problemas problemas físicos e matemáticos. Diferentemente das técnicas tradicionais, o MLB tem origem na Teoria Cinética dos Gases [1].

As equações de Burgers geralmente aparecem como simplificações de equações governantes de fenômenos físicos, como por exemplo, a equação de conservação de quantidade de movimento de escoamentos. A versão unidimensional, desprezando o gradiente de pressão, pode ser descrita por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Em que u é a velocidade, x a coordenada espacial, t a coordenada temporal e ν a viscosidade cinemática. A equação (1) é conhecida como Equação Viscosa de Burgers. No presente trabalho, procurou-se resolvê-la considerando um domínio $0 \leq x \leq 1$ e condição inicial $u(0,t) = u(1,t) = 0$ para $t \geq 1$ e $u(x,1) = x[1 + (t/t_0)^{(1/2)}\exp(x^2/4\nu)]^{(-1)}$ para $0 \leq x \leq 1$, sendo $t_0 = \exp(1/8\nu)$. Esse problema foi estudado no trabalho [2], através de uma equação de equilíbrio modificada com a inclusão de um parâmetro livre.

Nesse trabalho, também foi realizada uma pequena modificação no método tradicional para solução de problemas de advecção-difusão [3]. No entanto, diferentemente do trabalho de [2], adiciona-se uma constante pré-definida na equação de equilíbrio, que é dada abaixo:

$$f_i^{eq} = w_i u \left[1 + \frac{0{,}5c_i u}{c_s^2} + \frac{(0{,}5c_i u)^2}{c_s^2} - \frac{3}{8}u^2\right] \tag{2}$$

Sendo a velocidade do som no lattice $c_s^2 = 1/3$, os pesos $w_i = (1/6,\ 1/6,\ 2/3)$ e as velocidades $c_i = (1,\ -1,\ 0)$. Assim, pode-se resolver a equação de Lattice-Boltzmann:

$$f(x + c_i\Delta t, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f(x,t) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{eq} \tag{3}$$

[1]vinicius.mapelli@usp.br
[2]luiz.cze@usp.br
[3]lubencg@sc.usp.br

Em que o fator de relaxação τ possui a seguinte relação com a viscosidade cinemática: $\nu = c_s^2(\tau - 0{,}5\Delta t)$.

Os resultados foram comparados com a solução analítica do problema, para dois conjuntos de parâmetros: $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}002$ e $\nu = 0{,}005$; e para $\Delta x = 0{,}005$, $\Delta t = 0{,}0005$ e $\nu = 0{,}0005$. Os resultados obtidos são mostrados na figura (1). Também, o erro foi calculado para o resultado com $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}002$ e $\nu = 0{,}005$ pelo critério de erro global relativo proposto no trabalho de [2]. O valor encontrado foi de $2{,}6065.10^{-4}$, sendo menor que o menor dos erros encontrados por [2] em função de seu parâmetro livre e tempo de relaxação, $2{,}6738.10^{-4}$.

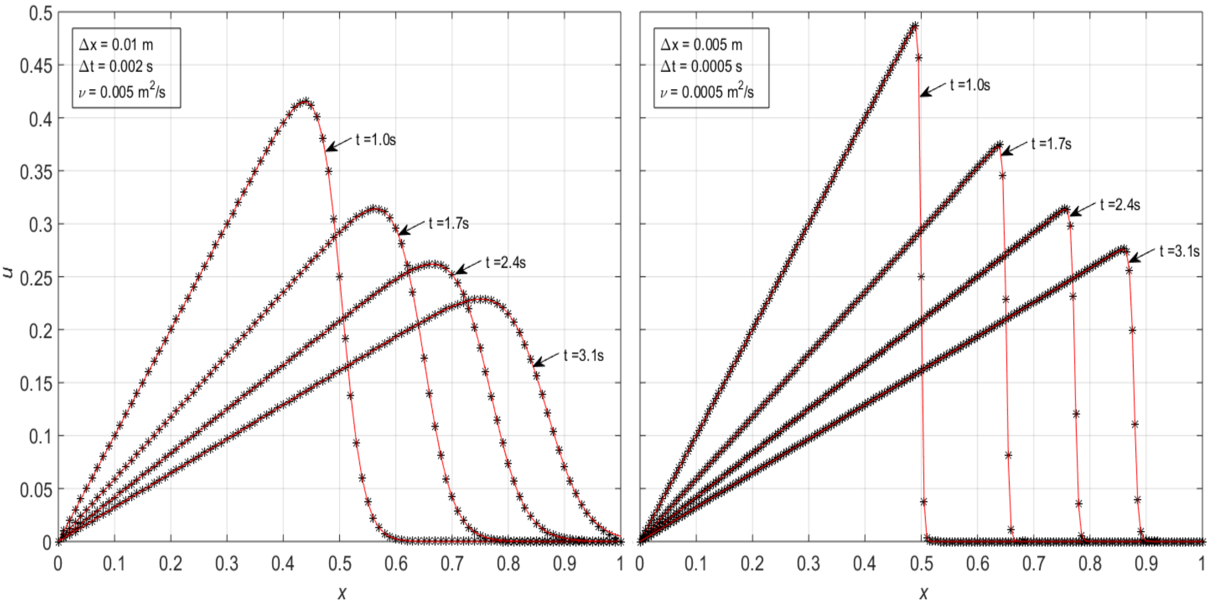

Figura 1: Comparação entre resultados numéricos(pontos) e analíticos (linha contínua).

Agradecimentos: Este trabalho recebeu suporte financeiro e recursos computacionais fornecidos pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2016/095090-1.

Referências

[1] Y. Duan, R. Liu and Y. Jiang, Lattice Boltzmann model for the modified Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2002.DOI: 10.1016/j.amc.2008.01.020.

[2] Y. Gao, L. Le and B. Shi, Numerical solution of Burgers' equation by lattice Boltzmann method, *Applied Mathematics and Computation*, 2013. DOI: 10.1016/j.amc.2013.01.056.

[3] T. Kruger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva and E. M. Viggen. Lattice Boltzmann for Advection-Difussion Problems. In: _____. **The Lattice Boltzmann Method**, 2017, cap. 8, p. 297-329.

