Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolução aproximada de sistemas lineares advindos de problemas de otimização topológica

Thadeu A. Senne[1]
Instituto de Ciência e Tecnologia, UNIFESP, São José dos Campos, SP
Francisco A. M. Gomes Neto[2]
Departamento de Matemática Aplicada, UNICAMP, Campinas, SP
Sandra A. Santos[3]
Departamento de Matemática Aplicada, UNICAMP, Campinas, SP

1 Introdução

Um problema bastante comum em otimização topológica consiste em encontrar uma estrutura que seja o mais rígida possível, respeitando a uma restrição sobre o volume máximo de material disponível para construí-la. Sob determinadas hipóteses, a função objetivo dos problemas de otimização topológica exige a resolução de um sistema linear associado às condições de equilíbrio estático da estrutura, que é responsável por grande parte do esforço computacional necessário no processo de obtenção da solução ótima. Tendo isso em mente, elaboramos estratégias para encontrar soluções aproximadas dos sistemas lineares mencionados acima, baseadas na *técnica das aproximações combinadas* [1], e cujas soluções estão aliadas à Programação Linear por Partes Sequencial [2]. Resultados preliminares mostram que a aplicação de tais estratégias produz uma grande redução no tempo total gasto para resolver problemas de otimização topológica clássicos da literatura.

2 Metodologia empregada

O sistema linear que deve ser resolvido para calcular o valor da função objetivo de um problema de otimização topológica é da forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

em que $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz de rigidez global da estrutura (que é simétrica e definida positiva e, portanto, não singular), $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\mathbf{f}$ é o vetor de forças externas aplicadas à estrutura, e n é o número total de graus de liberdade. Utilizamos a fatoração de Cholesky para resolver o sistema (1).

[1]senne@unifesp.br
[2]chico@ime.unicamp.br
[3]sandra@ime.unicamp.br

A resolução do sistema linear (1) envolve, basicamente, três etapas: a montagem da matriz $\mathbf{K}$, a obtenção da sua fatoração de Cholesky, e, por fim, a resolução dos dois sistemas lineares triangulares resultantes dessa fatoração. Uma vez que o passo mais caro é a obtenção do fator de Cholesky de $\mathbf{K}$, a técnica empregada neste trabalho para encontrar a solução aproximada de (1) evita o cálculo desse fator a cada iteração do algoritmo de otimização. Essa abordagem é conhecida como *técnica das aproximações combinadas* [1], na qual a fatoração de Cholesky da matriz de rigidez global é calculada em uma iteração m_0 de um método de otimização e reutilizada nas iterações subsequentes $m_0+1, \ldots, m_0+r$, em que r é um inteiro positivo. Denotamos por $\mathbf{K}_0$ a matriz de rigidez global calculada na iteração m_0 e por $\mathbf{G}_0$ o seu respectivo fator de Cholesky, que é uma matriz triangular superior.

Numa iteração m tal que $m_0+1 \leq m \leq m_0+r$, desejamos obter uma solução aproximada $\widetilde{\mathbf{u}}$ de (1) na forma

$$\widetilde{\mathbf{u}} = y_1\widehat{\mathbf{u}}^{(1)} + y_2\widehat{\mathbf{u}}^{(2)} + \ldots + y_s\widehat{\mathbf{u}}^{(s)}, \tag{2}$$

em que s é um número inteiro positivo pequeno (por exemplo, $s \leq 5$) e $\widehat{\mathbf{u}}^{(j)}$ é solução do sistema linear

$$\mathbf{K}_0\widehat{\mathbf{u}}^{(j)} = -(\Delta\mathbf{K})\widehat{\mathbf{u}}^{(j-1)}, \ j = 2, \ldots, s, \qquad \text{com} \qquad \widehat{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{f}. \tag{3}$$

Em (3), $\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ representa a variação da rigidez da estrutura entre as iterações m_0 e m. Note que a obtenção da solução aproximada (2) envolve a resolução dos sistemas lineares (3), para os quais já temos disponível a fator de Cholesky $\mathbf{G}_0$ de $\mathbf{K}_0$ calculado previamente, e os coeficientes $y_1, \ldots, y_s$ são a solução do sistema linear de pequeno porte

$$\mathbf{R}_B^T\mathbf{K}\mathbf{R}_B\mathbf{y} = \mathbf{R}_B^T\mathbf{f}, \tag{4}$$

em que

$$\mathbf{R}_B = [\widehat{\mathbf{u}}^{(1)}\ \widehat{\mathbf{u}}^{(2)}\ \ldots\ \widehat{\mathbf{u}}^{(s)}] \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = [y_1\ \ldots\ y_s]^T. \tag{5}$$

Neste trabalho, adotamos sempre $s = 3$, e as estratégias desenvolvidas aqui consistem em estabelecer critérios para recalcular a fatoração de Cholesky de $\mathbf{K}$, que são baseados no valor do resíduo relativo $\|\mathbf{f} - \mathbf{K}\widetilde{\mathbf{u}}\|_2/\|\mathbf{f}\|_2$. Resultados preliminares mostram que a aplicação da técnica de aproximações combinadas em associação à Programação Linear por Partes Sequencial [2] produziu uma redução de até 57 % no número de iterações necessárias para encontrar a solução ótima dos problemas de otimização topológica e de até 64 % no tempo total necessário para obter essa solução.

Referências

[1] O. Amir, M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Approximate reanalysis in topology optimization, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 78:1474–1491, 2009, DOI: http://dx.doi.org/10.1002/nme.2536.

[2] F. A. M. Gomes, T. A. Senne. An algorithm for the topology optimization of geometrically nonlinear structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 99:391–409, 2014, DOI: http://dx.doi.org/10.1002/nme.4686.