Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equações de Riccati e Grupos de Lie

Alisson da Silva Pinto[1]
Patrícia Nunes da Silva[2]
Cristiane Oliveira de Faria[3]
Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, IME, UERJ, Rio de Janeiro, RJ
André Luiz Cordeiro dos Santos[4]
Departamento de Matemática, CEFET-RJ, Rio de Janeiro, RJ

O matemático norueguês *Sophus Lie* desenvolveu um método baseado no conceito de simetria para encontrar soluções de equações diferenciais. Essencialmente, uma simetria para a equação diferencial ordinária $y' = \omega(x, y)$ é uma transformação Γ que preserva sua estrutura. Isto é, se $\Gamma(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$ então a equação diferencial $\hat{y}' = \omega(\hat{x}, \hat{y})$ é satisfeita.

Uma das vantangens do método desenvolvido por Lie é a possibilidade de resolver equações que não se enquadrem previamente nos métodos usuais de solução, possam ser resolvidas. Neste contexto, considera-se uma família Γ_ε de simetrias, a qual constitui um grupo de Lie a um parâmetro. Ao menos localmente, há uma correspondência um a um entre cada grupo de Lie a um parâmetro e seu campo vetorial tangente (ξ, η). Temos

$$\left(\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right) = (\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y})), \qquad (\hat{x}(x, y, 0), \hat{y}(x, y, 0)) = (x, y)$$

Em [2], prova-se que uma família de equações diferenciais primeira ordem que admite os geradores infinitesimais

$$\xi = \frac{1}{f'(x)}, \quad \eta = -\frac{p'(x)}{f'(x)p(x)} \cdot y - -\frac{q'(x)}{f'(x)p(x)}, \tag{1}$$

tem a forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'}{p} G(py + q) - \frac{q'}{p} - \frac{p'}{p} y. \tag{2}$$

Além disso, são caractarizadas subfamílias de equações de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \tag{3}$$

que admitem geradores infinitesimais como em (1). Eles reescrevem (1) fazendo $f' \to \frac{f}{p}$

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{p}{f}, -\frac{p'y + q'}{f}\right) \tag{4}$$

[1]alisson.pinto@gmail.com
[2]nunes@ime.uerj.br
[3]cofaria@ime.uerj.br
[4]andreluiz.cordeiro@gmail.com

e consideram $G = u \mapsto u^2 + au + b$.

A equação de Riccati (3), expressa em termos de a, b e das funções f, p e q do gerador de simetrias (4) tem a forma

$$\frac{dy}{dx} = fy^2 + \frac{(a+2q)f - p'}{p}y + \frac{((a+q)q+b)f - q'p}{p^2} \tag{5}$$

Cheb-Terrab e Kolokolnikov [2] analisam casos para os quais os geradores (4) podem ser determinados. Eles cosideram em (5): $p' = 0$, $q' = 0$, $f = p$ ou $q = p$. **Quando** $p' = 0$, o geradores dependem apenas de x e são determinados como em [3], sendo da forma $(\xi, \eta) = (F(x), Q(x))$; **quando** $q' = 0$, (4) é da forma $(\xi, \eta) = (\mathcal{F}(x), \mathcal{P}(x)y)$ e (5) pode ser resolvida como em [4]; **quando** $f = p$, através da mudança de variáveis $y = u/f$, a EDO em u admitirá $(\xi, \eta) = (1, -q')$; e **quando** $q = p$, pela mudança de variáveis $y = u - 1$, a equação em u admitirá simetria da forma $(\xi, \eta) = (p/f, (-p'/f)u)$ e (5) pode ser resolvida como em [4].

Assim, seguindo esses passos, um algoritmo para encontrar simetrias lineares da forma $(\xi, \eta) = (F(x), P(x)y + Q(x))$ para equações de Riccati consiste em:

(i) Usar [3] e [4] para verificar se a EDO admite simetria da forma $(\xi, \eta) = (\mathcal{F}(x), \mathcal{Q}(x))$ ou $(\xi, \eta) = (\mathcal{F}(x), \mathcal{P}(x)u)$;

(ii) Se a EDO pertence à família invariante onde $f = p$ ou $p = q$, utilize as mudanças de variável indicadas e recaia no caso anterior;

Em [1], os autores propõem um método de resolução para a equação de Riccati (3) para casos em que certas relações entre seus coeficientes sejam satisfeitas. Além disso, eles aplicam o método à equação de Riccati que surge na EDP de Gross-Pitaevskii que modela o fenômeno do condensado de Bose-Einstein. O objetivo deste trabalho é relacionar os dois casos tratados por [1] e os propostos por [2]. Como resultado parcial, mostramos que o primeiro caso de [1] corresponde ao caso $q' = 0$ de [2]. Nossa próxima etapa consiste em analisar o segundo caso bem como considerar possibilidades não tratadas por [1].

Os autores agradecem o apoio da CAPES e da FAPERJ para realização deste trabalho.

Referências

[1] A. Al Bastami, M. R. Belić and N. Z. Petrović, Special solutions of the Riccati equation with applications to the Gross-Pitaevskii nonlinear PDE, *EJDE*, 2010(66):1-10, 2010, ISSN: 1072-6691.

[2] E. S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov, First Order ODEs, Symmetries amd Linear Transformations *Eur. J. Appl. Math.*, 14(2), 231-246, 2003. DOI:10.1017/s0956792503005126

[3] E. S. Cheb-Terrab, A. D. Roche, Symmetries and first order ODE patterns, *Comput. Phys. Commun.*, 133:239-260, 1998. DOI: 10.1016/S0010-4655(98)00071-X

[4] M. Chini, Sull'integrazione di alcune equazioni differenziali del primo ordine, *Rendiconti Instituto Lombardo* 57(2), 506-511, 1924.

