Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Reformulação para o PMQF Considerando uma Matriz Quadrada com Entradas Reais e um Vetor Intervalar

Igor Breda Ferraço[1]
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia, IFBA, Eunápolis, BA
Neilson Soares Castro[2]
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia, IFBA, Eunápolis, BA
Fabiolo Moraes Amaral[3]
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia, IFBA, Eunápolis, BA

A teoria dos conjuntos fuzzy relaciona determinados conceitos da teoria usual de conjuntos, considerando graus de pertinência de um elemento, para assim incluir na teoria de conjuntos as incertezas que surgem ao se definir certos conjuntos. Com isso, abordagem fuzzy para o Problema de Mínimos Quadrados (PMQ) se torna uma alternativa viável para resolvê-lo considerando tanto sua natureza determinística, desde que essas são características intrínsecas do conceito de variável fuzzy [3].

Os estudos para o PMQ fuzzy (PQMF) feitos por [3], considera que a formulação deste problema consiste na estimativa ótima da solução de um sistema de equações inconsistente e sobredeterminado, da forma

$$\widetilde{H}\widetilde{x} \cong \widetilde{y} \tag{1}$$

onde $\tilde{H}$ tem m linhas e n colunas, com $m \geq n$, $\tilde{y}$ é um vetor conhecido de dimensão m e $\tilde{x}$ é o vetor a ser estimado, tem dimensão n. Para esta formulação consideramos como entradas os números triangulares Fuzzy da forma $(m, a, b)_T$, onde m é o valor principal (grau de pertinência 1) e a e b extremos do intervalo suporte. Assim, pretendemos encontrar $\hat{\tilde{x}}$ que faça com que a o funcional do problema seja mínimo, isto é, $\min_x J(\widetilde{x})$, ou ainda:

$$J\left(\widehat{\widetilde{x}}\right) = \left\|\widetilde{H}\widehat{\widetilde{x}} - \widetilde{y}\right\| < J(\widetilde{x}) = \left\|\widetilde{H}\widetilde{x} - \widetilde{y}\right\|. \tag{2}$$

Encontra-se em [1] uma base estrutural matemática sobre um conjunto M^n, tal que $M = I(\mathbb{R}) \cup \overline{I(\mathbb{R})}$, onde $I(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \overline{a}] : \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R} \text{ e } \underline{a} < \overline{a}\}$ e $\overline{I(\mathbb{R})} = \{[\overline{a}, \underline{a}] : \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}\}$, induzindo-o a uma estrutura de espaço vetorial, por meio de $(\mathbb{R}^{2n}, +, \cdot)$, munido de suas operações usuais e construindo uma bijecção entre M^n e $\mathbb{R}^{2n}$. Seguindo essa mesma linha, [3] propõe M^n como um Espaço Vetorial cujas operações são as usuais do $\mathbb{R}^{2n}$, um corpo $(M, +_M, \cdot_M)$ associado a este espaço, definido por operações usuais do $\mathbb{R}^2$ e definiu um produto interno em M^n como sendo

$$\langle A, B \rangle = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{a_i}\,\underline{b_i}, \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\,\overline{b_i}\right], \tag{3}$$

---

[1] igor.ferraco@ifba.edu.br
[2] neilsoncastro14@outlook.br
[3] fabiolo@ifba.edu.br

tal que $A, B \in M^n$, $A = \left(\left[\underline{a_1}, \overline{a_1}\right], \left[\underline{a_2}, \overline{a_2}\right], \ldots, \left[\underline{a_n}, \overline{a_n}\right]\right)$. Em nossa formulação, conduzimos os experimentos neste mesmo sentido, efetuando mudanças no produto interno, visto que o mesmo possui notável influência no PQMF. Assim, nosso produto interno é dado como

$$\langle A, B\rangle = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{a_i}\,\underline{b_i}, \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{a_i}\,\underline{b_i} + 8\overline{a_i}\,\overline{b_i} + 2\underline{a_i}\,\overline{b_i} + 2\overline{a_i}\,\underline{b_i}\right)\right], \tag{4}$$

com $A, B \in M^n$. Com isso defini-se a norma em M^n por $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$, onde $\sqrt{[a_1, a_2]} = \left[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}\right]$.

Utilizaremos um produto entre uma matriz quadrada com entradas reais e uma n-upla de intervalos (elementos do M^n) definido em [2] para reformular o PMQF. iremos tomar $H \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$, $\widetilde{y}_{n\times 1}$ um vetor conhecido cujas entradas são números triangulares da forma $A = (m, a, b)_T$, tal que m seja o valor principal (tem pertinência 1), $[a, b]$ o fecho do conjunto suporte de A e $\widetilde{x}_{n\times 1}$ o vetor a ser estimado. Dessa forma:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{bmatrix} \left(y_1, \underline{y_1}, \overline{y_1}\right)_T \\ \left(y_2, \underline{y_2}, \overline{y_2}\right)_T \\ \vdots \\ \left(y_n, \underline{y_n}, \overline{y_n}\right)_T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{x} = \begin{bmatrix} \left(x_1, \underline{x_1}, \overline{x_1}\right)_T \\ \left(x_2, \underline{x_2}, \overline{x_2}\right)_T \\ \vdots \\ \left(x_n, \underline{x_n}, \overline{x_n}\right)_T \end{bmatrix} \tag{5}$$

Porém, o tratamento será feito separadamente entre os conjuntos suportes e os valores principais de $\widetilde{y}$, assim, podemos considerar

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad e \quad y_I = \begin{bmatrix} \left[\underline{y_1}, \overline{y_1}\right] \\ \left[\underline{y_2}, \overline{y_2}\right] \\ \vdots \\ \left[\underline{y_n}, \overline{y_n}\right] \end{bmatrix} \tag{6}$$

tal que $y_i \in \left[\underline{y_i}, \overline{y_i}\right]$, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Analogamente à solução do PMQ clássica, teremos $\widehat{x}_I = \left(H^*H\right)^{-1} H^* y_I$, isto é, o valor que minimiza $J_I(x_I) = \|Hx_I - y_I\|$.

Essa reformulação do PQMF tem como intuito obter a solução ótima do problema de tal forma que ela contenha a solução do PMQ clássica, o que não era garantido com a matriz H tendo entradas intervalares.

Referências

[1] T. Costa, Generalized interval vector spaces and interval optimization. *Information Sciences*, 311:74-85, 2015.

[2] T. Costa, Espaços Vetoriais e Topológicos de Intervalos Generalizados com Alguns Conceitos de Cálculo e Otimização Intervalar. Tese de Doutorado em Matemática, Universidade Estadual Paulista, (2014).

[3] V. N. Rufino, Análise da influência de uma variável fuzzy no problema dos mínimos quadrados. Dissertação de Mestrado em Modelagem Computacional, UESC, (2016).

