Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Propriedades dos Polinômios de Chebyshev de Terceira e Quarta Espécies

Mijael Hancco Suni[1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, FCT/UNESP, Campus de Presidente Prudente, SP
Vanessa Botta[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT/UNESP, Campus de Presidente Prudente, SP

Os polinômios ortogonais ocupam um lugar muito importante no desenvolvimento de muitas áreas de matemática pura e aplicada, como, na teoria das equações diferenciais, teoria da aproximação das funções, na análise numérica, entre outras.

Dentre os polinômios ortogonais clássicos, temos os polinômios de Chebyshev de primeira, segunda, terceira e quarta espécies. Grande parte dos livros e artigos de pesquisa que tratam dos polinômios de Chebyshev contêm principalmente resultados dos polinômios de primeira e segunda espécies com suas numerosas aplicações. No entanto, há apenas uma literatura muito limitada sobre polinômios de terceira e quarta espécies.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar as principais propriedades destes polinômios, as quais mostraremos a seguir e também podem ser vistas em detalhe na referência [2].

Definição 1. *Os polinômios de Chebyshev $V_n(x)$ e $W_n(x)$ de terceira e quarta espécies são polinômios de grau n em x definidos, respectivamente, por*

$$V_n(x) = \frac{cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{cos\frac{\theta}{2}},$$

e

$$W_n(x) = \frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{sen\frac{\theta}{2}},$$

onde $x = \ cos\theta$.

Os polinômios $V_n(x)$ e $W_n(x)$ são, de fato, obtidos a partir de dois polinômios particulares de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, para dois casos especiais não simétricos $\beta = -\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Estes são explicitamente:

---

[1]mijale_bekan18@hotmail.com
[2]botta@fct.unesp.br

$$V_n(x) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x),$$

$$W_n(x) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} P_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

Teorema 1. *Os polinômios de Chebyshev de terceira e quarta espécies satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos:*

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \qquad (n = 2, 3, ...)$$

com $V_0(x) = 1$ *e* $V_1(x) = 2x - 1$, *e*

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \qquad (n = 2, 3, ...)$$

com $W_0(x) = 1$ *e* $W_1(x) = 2x + 1$.

Também é possível representá-los da seguinte forma

$$V_n(x) = u^{-1}T_{2n+1}(u), \qquad W_n(x) = U_{2n}(u), \qquad u = \cos\frac{1}{2}\theta,$$

onde $T_n(x)$ e $U_n(x)$ são polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies, respectivamente.

Os zeros de $V_{n(x)}$ e $W_n(x)$ são dados, respectivamente, por

$$x = \cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}} \qquad e \qquad x = \cos\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Agradecimento

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] E.X.L. de Andrade, C.F. Bracciali, F.R. Rafaeli, *Introdução aos Polinômios Ortogonais*, Notas em Matemática Aplicada, vol. 64, SBMAC, São Carlos, 2012.

[2] J. C. Mason and D.C. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. Chapman and Hall, New York, NY, CRC, Boca Raton, 2003.

[3] G. Szegö. *Orthogonal Polynomials*. Colloquium Publications, American Mathematical Society, Vol. 23, Providence, RI, 1975.