Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Espaços de Hilbert de Reprodução e equações integrais

Maria Caruline Baquião[1]
José Claudinei Ferreira[2]
Instituto de Ciências Exatas, Unifal-MG, Alfenas, MG

Este trabalho é dedicado ao estudo de um tipo de método de projeção para aproximação de solução de equações integrais do tipo

$$u(x) + p(x)u(h(x)) + \int_a^b K(x,t)g(u(t))dt = f(x), \tag{1}$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq x, t \leq b$, $K(x,t)$, $p(x)$, g, $h(x)$ e $f(x)$ são funções conhecidas e suficientemente suaves. Como exemplo, consideramos o problema de valor de contorno

$$\theta'' = -\alpha^2 sen(\theta) + g(t), \qquad \theta(0) = \theta(1) = 0, \tag{2}$$

que modela o movimento angular de um pêndulo simples. Essa equação é equivalente à

$$\theta(t) + \alpha^2 \int_0^1 (tx - \min(t,x))\, sen(\theta(x))dx = \int_0^1 (tx - \min(t,x))\, g(x)dx, \quad t \in [0,1]. \tag{3}$$

De acordo com [2], equações integrais são importantes em vários campos da ciência como eletromagnetismo, mecânica quântica, fenômenos biológicos, economia, dentre outros, mas muitas delas não podem ser resolvidas analiticamente, necessitando assim de métodos numéricos [1].

O método de projeção que temos interesse neste trabalho é o método de espaços de Hilbert de reprodução (EHR). A ideia deste método é representar a solução de (1) em uma base ortogonal para esse espaço [2, 3].

Para explicar brevemente a ideia do método, podemos supor que a equação (1) pode ser escrita como

$$\mathbb{L}u(x) = \mathbf{f}(x) = F(x, u(x)), \tag{4}$$

em que $\mathbb{L} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear e limitado. Vamos supor ainda que $\mathcal{H}$ é um espaço de reprodução, ou seja, que é um espaço de funções $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que o funcional linear δ_x, dado $\delta_x(u) = u(x)$, para cada $x \in [a,b]$, é sempre limitado. Nesse caso, para cada $x \in [a,b]$, existe uma única função $R_x \in \mathcal{H}$ para a qual vale a propriedade de reprodução

[1]mariacaruline@gmail.com
[2]jose.ferreira@unifal-mg.edu.br

$$u(x) = \langle u, R_x \rangle, \qquad u \in \mathcal{H}, \tag{5}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de $\mathcal{H}$ [3]. Pode-se mostrar que, se $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é denso em $[a, b]$, então $\{\psi_i\} = \{\mathbb{L}^* R_{x_i}\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{H}$ e gera a base ortogonal $\{\overline{\psi_i} = \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \psi_j\}$. A solução aproximada de (4) é dada por (6), com convergência na norma de $\mathcal{H}$ e uniforme, e pode ser obtida resolvendo um sistema linear [2].

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle u, \overline{\psi}_i \rangle \, \overline{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij} \mathbf{f}(x_j) \, \overline{\psi_i(x)}, \qquad x \in [0, 1]. \tag{6}$$

Como exemplo desse método, obtemos a Figura 1, para a equação linear (7), com $n = 20$ e integração numérica pela regra dos trapézios. A solução exata é $u(x) = e^x$.

$$u(x) + \int_0^1 xsu(s)ds = e^x + x, \qquad t \in [0, 1]. \tag{7}$$

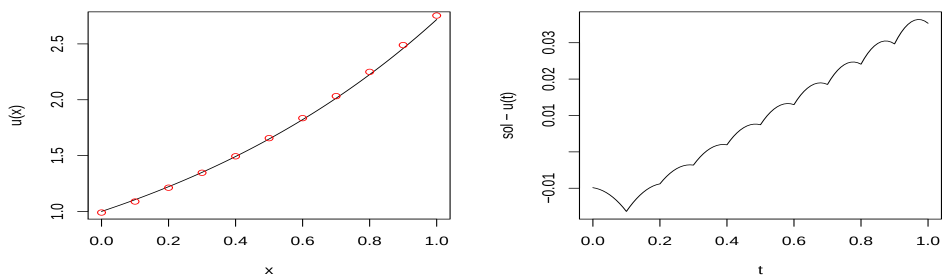

Figura 1: (a) Solução aproximada obtida e (b) erro cometido na aproximação.

Para o caso de equações não lineares é necessário um processo iteretivo para estimar os valores de $F(x_i, u(x_i))$, o que tem se mostrado eficiente em vários trabalhos como [2,3].

Agradecimentos

Este trabalho foi elaborado com o apoio da CAPES.

Referências

[1] P. Assari, M. Dehghan. Application of dual-Chebyshev wavelets for the numerical solution of boundary integral equations with logarithmic singular kernels, *Engineering with Computers*, 1-16, 2018.

[2] S. Javadi, E. Babolian, E. Moradi. New implementation of reproducing kernel Hilbert space method for solving a class of functional integral equations, *Communications in Numerical Analysis*, 2014:1-7, 2014.

[3] M. G. Sakar. Iterative reproducing kernel Hilbert spaces method for Riccati differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309:163-174, 2017.