Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uso da derivada fracionária de Riemann-Liouville no método de regularização de Tikhonov

Maria Caruline Baquião[1]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Michele Martins Lopes[2]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Taís Aparecida Faria[3]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
José Paulo Carvalho dos Santos[4]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Nelson H. T. Lemes [5]
Instituto de Química, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

A energia total irradiada por um corpo negro em função da frequência $W(\nu)$, com uma distribuição de temperatura $a(T)$ ao longo de sua área superficial, é dado pela equação integral de Fredholm de primeira ordem (1), onde h é a constante de Planck, k é a constante de Boltzmann e c a velocidade da luz no vácuo:

$$W(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}a(T)dT = \int_0^{T_{max}} K(\nu,T)a(T)dT. \tag{1}$$

A determinação da distribuição $a(T)$, a partir do espectro $W(\nu)$, é um problema linear mal-colocado [1, 3, 4]. Sendo assim, é necessário a utilização de algum método de regularização, como regularização Tikhonov (RT), principalmente se lidamos com dados experimentais.

A regularização de Tikhonov envolve colocar uma informação adicional na abordagem dos mínimos quadrados, através da técnica dos multiplicadores de Lagrange. Neste trabalho, o operador de regularização é definido pelo operador derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α, representado por D^α. Sendo assim, a solução desejada é dada por

$$\mathbf{a}_\lambda^\alpha = min_{\mathbf{a}}\{||\mathbf{Ka}-\mathbf{W}||_2^2 + \lambda^2(p_0||\mathbf{f}||_2^2 + p_1||\mathbf{D}^\alpha\mathbf{a}||_2^2)\}, \tag{2}$$

onde

$$(D^\alpha a)(T) = (D^n J^{n-\alpha}a)(T) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^T \frac{a(s)ds}{(T-s)^{\alpha-n+1}}, \tag{3}$$

[1]mariacaruline@gmail.com
[2]mi_martins22@hotmail.com
[3]taisfariat@gmail.com
[4]zepaulo@unifal-mg.edu.br
[5]nelsonunifal@gmail.com

para $n-1 \leq \alpha \leq n$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. Neste trabalho o operador D^α foi colocado na forma matricial, usando o método do trapézio [4].

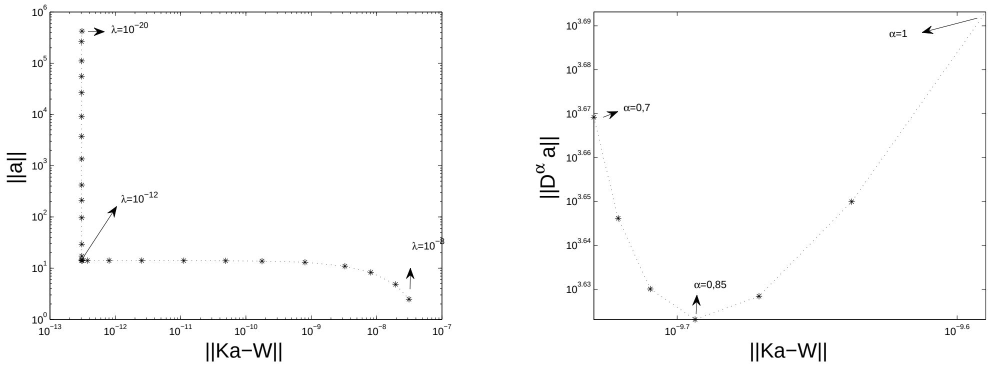

Figura 1: (a) curva-L e (b) curva $\|D^\alpha a\|_2 \times \|\mathbf{Ka}-\mathbf{W}\|_2$ para diferentes valores de α, obtidos para o mesmo $\lambda = 10^{-12}$.

Erros experimentais simulados, com distribuição gaussiana de média 0 e desvio padrão 10^{-14}, foram incorporados aos dados gerados pela função $a(T) = \exp(-(T-450).^2/25000)$, para $0 < \nu < 2 \times 10^{14}$Hz. A Figura 1(a) apresenta a curva-L, $||a||_2 \times ||\mathbf{Ka}-\mathbf{W}||_2$ para diferentes valores de λ, obtidos para o mesmo $\alpha = 1$; e a figura 1(b) mostra o comportamento $||D^\alpha a||_2 \times ||\mathbf{Ka}-\mathbf{W}||_2$ para diferentes valores de α, obtidos para o mesmo $\lambda = 10^{-12}$. O mínimo da curva apresentada na figura 1(b) ocorre em $\alpha = 0,85$, onde $||\mathbf{Ka}-\mathbf{W}||_2 = 3.8 \times 10^3$, $||\mathbf{a}||_2 = 2.0 \times 10^{-10}$ e $||\mathbf{D}^\alpha \mathbf{a}||_2 = 4.2 \times 10^3$. Este estudo inicial sugere que a escolha apropriada da ordem generalizada no operador proposto ajuda a minimizar as oscilações na solução final.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível superior (CAPES).

Referências

[1] N. N. Bojarski. Inverse Balck Body Problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 30, n.4, pp.778, 1982.

[2] R. F. Camargo e E. C. Oliveira. *Cálculo Fracionário.* São Paulo: LF, 2015.

[3] D. Y. Liu, T. M. L Kirati, O. Gibaru, W. Perruquetti. Fractional Order Numerical Differentiation with B-Spline Functions. *The International Conference on Fractional Signals and Systems* 2013, Oct 2013, Ghent, Belgium, 2013.

[4] X. Sun e D. L. Jaggard. The inverse blackbody radiation problem: A regularization solution. *Journal of Applied Physics*, v. 62, pp. 4382, 1987.

