Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Nova Metodologia para a Extensão de Operações Matemáticas Sucessivas

Marlo Moesia Barroso[1]
José Karam Filho[2]
Gilson Antônio Giraldi[3]
Laboratorio Nacional de Computação Científica, LNCC, Petrópolis, RJ

Este trabalho expõe as definições das classes de funções denominadas produto sucessivo e soma sucessiva [2], semelhantes a produtórios e somatórios usuais, porém mais genéricas, e apresenta algumas de suas propriedades. Estas funções estendem recursões usuais e oferecem resultados para valores comumente impostos por definição, como o fatorial de zero e 0^0.

1 Operações Sucessivas de Produto e Soma

Seja um grupo $G(A,\cdot)$ e SZ o conjunto das sequências inteiras sobre A, na forma geral,

$$(\alpha_i) = (\,\dots\,\alpha_{-2},\,\alpha_{-1},\,\alpha_0,\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots\,);\ \forall\ i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Nestas condições, define-se recursivamente, conforme [2], a função $P_{\mathrm{z}} : SZ \times \mathbb{Z} \to A$ por

$$\begin{cases} P_z((\alpha_i),0) = \eta_{(\cdot)},\ \text{e} & (2)\\ P_z((\alpha_i),z+1) = P_z((\alpha_i),z)\cdot\alpha_{z+1};\ \forall\ z \in \mathbb{Z}, & (3)\end{cases}$$

denominada produto sucessivo de (α_i), calculado em $i = z$, onde $\eta_{(\cdot)}$ é o elemento neutro da operação binária $(\cdot)$. Por conveniência, $P_{\mathrm{z}}((a_i), z)$ será simbolizada através da notação

$$P_z((\alpha_i),z) = \alpha_i\,!^{\,i=z};\ \forall\ z \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Substituindo $(\cdot)$ por $(+)$, que além de associativo também é comutativo, o mesmo pode ser feito com o grupo $G(A,+)$, estabelecendo desta vez a soma sucessiva, $S_{\mathrm{z}} : SZ \times \mathbb{Z} \to A$:

$$\begin{cases} S_z((\alpha_i),0) = \eta_{(+)},\ \text{e} & (5)\\ S_z((\alpha_i),z+1) = S_z((\alpha_i),z) + \alpha_{z+1};\ \forall\ z \in \mathbb{Z}, & (6)\end{cases}$$

onde $\eta_{(+)}$ é o elemento neutro da operação binária $(+)$. Por conveniência, $S_{\mathrm{z}}((a_i), z)$ será simbolizada através da notação

$$S_z((\alpha_i),z) = \alpha_i\,\underset{+}{!}^{\,i=z};\ \forall\ z \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Os valores desses produtos e somas para z negativo são obtidos considerando as recursões como sistemas de equações, (2)-(3) e (5)-(6), e fazendo $z = -1, z = -2, z = -3$, etc. Por exemplo considerando (2)-(3), para todos os inteiros, obtém-se

[1] moesia.org, moesia@oi.com.br ou marlomb@lncc.br
[2] jkfi@lncc.br
[3] gilson@lncc.br

$$\alpha_i !^{i=z} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{z-1} \cdot \alpha_z ; \ \forall\, z \in \mathbb{Z}^{*+}, \tag{8}$$

$$\alpha_i !^{i=0} = \eta_{(\cdot)} \text{ e} \tag{9}$$

$$\alpha_i !^{i=z} = (\alpha_0)^{-1} \cdot (\alpha_{-1})^{-1} \cdot (\alpha_{-2})^{-1} \cdot \ldots \cdot (\alpha_{z+2})^{-1} \cdot (\alpha_{z+1})^{-1} ; \ \forall\, z \in \mathbb{Z}^{-}. \tag{10}$$

2 Transformadas de Sequência Inteira

Define-se a transformada de sequência inteira pela soma sucessiva, $T_{\mathrm{Sz}} : SZ \to SZ$, como uma sequência formada por valores de somas sucessivas, calculados em $i = z$:

$$(\alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=z}) = (\ldots, \alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=-z}, \ldots, \alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=-1}, \alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=0}, \alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=1}, \ldots, \alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=z}, \ldots); \forall\, z \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Por simplicidade e clareza, as seguintes notações introduzidas em [2] são aqui utilizadas:

$$(\alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i=z}) = \alpha_i \overset{\vdots}{+}{}^{i} = \alpha_i \overset{1}{\overset{\vdots}{+}}{}^{i} ; \ \forall\, z \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

A nova sequência T_{Sz} pode também ser transformada produzindo outra T_{Sz} e assim por diante, n vezes ou até a ordem n. Similarmente a T_{Sz}, define-se a transformada de sequência inteira pelo produto sucessivo, $T_{\mathrm{Pz}} : SZ \to SZ$, bem como suas transformações subsequentes.

3 Algumas Aplicações dos Produtos e Somas Sucessivos

$$n! = i!^{i=n} ; \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

$$x^z = x!^{i=z} ; \ \forall\, z \in \mathbb{Z} ; \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*. \tag{14}$$

Destaca-se a seguinte relação entre produto e transformada de ordem n pela soma sucessiva:

$$i \overset{\mathrm{n}}{\overset{\vdots}{+}}{}^{i=z} = z(z+i)!^{i=n}/(n+1)!, \ \forall\, z \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Considerando (15) e a definição usual de número binomial, que é dada por

$${}_nC_k = n!/[(n-k)!\,\mathrm{k}!], \ \forall\, k \text{ e } n \in \mathbb{N}, (n-k) \geqslant 0, \tag{16}$$

obtém-se os binomiais através de transformadas, bem como sua extensão para z e k inteiros:

$${}_nC_k = i \overset{\mathrm{k-1}}{\overset{\vdots}{+}}{}^{i=n-k+1} ; \ \forall\, k \text{ e } n \in \mathbb{N} ; (n-k) \geqslant 0. \tag{17}$$

$$\begin{cases} {}_zC^{\prime}_k = i \overset{\mathrm{k-1}}{\overset{\vdots}{+}}{}^{i=z-k+1} ; k \in \mathbb{Z}^{+} ; \ \forall\, z \in \mathbb{Z}. & (18) \\ {}_zC^{\prime}_k = i \overset{\mathrm{z-k-1}}{\overset{\vdots}{+}}{}^{i=k+1} ; k \in \mathbb{Z}^{-} ; \ \forall\, z \in \mathbb{Z}. & (19) \end{cases}$$

Referências

[1] S. Lang. *Algebra.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[2] M. Moesia, Uma nova metodologia para a extensão de domínio de operações matemáticas sucessivas, com aplicações na análise combinatória, Dissertação de Mestrado em Modelagem Computacional, LNCC, (2017).

[3] K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications.* Springer-Verlag, MacGraw-Hill, New York, 2012.