Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Mapeamento de rede via teoria espectral de grafos

Rafael Boniolo[1]
Ciência da Computação, UTFPR, campus Santa Helena
Natanael Dotti Ceolan[2]
Ciência da Computação, UTFPR, campus Santa Helena
Evandro Alves Nakajima[3]
Ciência da Computação, UTFPR, campus Santa Helena

A partir de uma rede qualquer, pode-se aplicar proposições da teoria dos grafos, para que seja possível obter uma análise precisa sobre a rede. Este trabalho busca mapear a rede da UTFPR campus Santa Helena em forma de grafo, a fim de verificar se há redundâncias e conexidade na mesma, baseando-se na topologia utilizada e na teoria dos grafos.

Para que seja possível navegar na web, os dados devem sair de um ponto X (seu local) e ir ao ponto Y (servidor qualquer). Porém, o caminho entre um ponto e outro pode não ser direto, os dados passam por vários pontos até chegar ao destino final. Esses pontos podem ser considerados vértices de um grafo, visto que cada ponto necessita de um tempo próprio para dar sequência a transmissão [3]. Para fazer as identificações da rede em questão, primeiramente precisa-se das definições referentes à teoria de grafos que serão relevantes para o desenvolvimento deste trabalho [1, 2].

Definição 1.1. *Um grafo é uma estrutura $G = G(V, E)$, constituída por um conjunto finito e não vazio V cujos elementos são denominados vértices, e um conjunto E de subconjuntos com dois elementos de V, denominados arestas. Nesse contexto, podemos definir ainda:*

a) *O grau de um vértice v, denotado por $d(v)$, é o número de arestas que incidem em v. Vértices ligados por arestas são vértices adjacentes.*

b) *Um caminho (path) é uma cadeia em que todos os vértices são distintos.*

c) *Um grafo é conexo se dados dois vértices v_1 e v_2, existe um caminho ligando v_1 à v_2. Caso contrário, o grafo é desconexo.*

d) *A matriz de adjacência $A = (A_{ij})_{n\times n}$, onde n é o número de vértices do grafo, possui entradas*

$$\begin{cases} A_{ij} = 1, & se \quad \{i, j\} \in E \\ A_{ij} = 0, & se \quad \{i, j\} \notin E \end{cases}.$$

[1]boniolo@alunos.utfpr.edu.br
[2]ceolan@alunos.utfpr.edu.br
[3]enakajima@utfpr.edu.br

e) A matriz Laplaciana $L = (L_{ij})_{n\times n}$ é a matriz $L = D - A$, onde $D = (D_{ii})_{n\times n}$ é a matriz diagonal com entradas $D_{ii} = d(v_i)$ e A é a matriz de adjacência.

O mapeamento dos *access points* e *switchs* presentes no campus é feito atribuindo a cada nó uma identificação através de enumeração. Assim, tem-se o grafo da figura 1.:

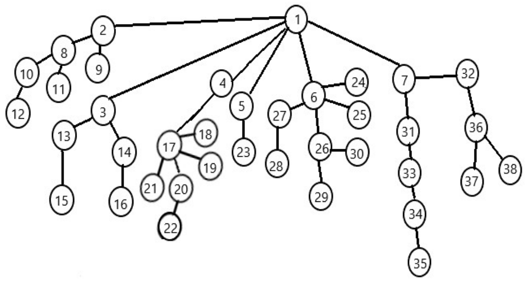

Figura 1: *Switchs* e *access points* do campus Santa Helena.

Proposição 1.1. *Sejam $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ os autovalores da matriz Laplaciana L de um grafo G. Sejam $\tau(G)$ o número de árvores geradoras do grafo G e 1_L a matriz com todas as entradas iguais à 1 de mesma dimensão que a matriz Laplaciana de G, então*

a) O grafo G é conexo se, e somente se, $\mu_{n-1} > 0$.

b) $adj(L) = \tau(G) \cdot 1_L$, onde $adj(L)$ é a matriz adjunta de L.

Utilizando-se o software Maple, obteve-se que o polinômio característico do grafo apresentado na figura 1 é $p(\lambda) = \lambda^{38} - 74 \cdot \lambda^{37} + ... - 38 \cdot \lambda$, donde o segundo menor λ é maior que zero, provando portanto que o grafo em questão é conexo. Quanto a rede, tal resultado mostra que todos os pontos podem ser acessados sem problemas.

Outro caso que pode-se analisar é o caso das redundâncias na rede, isto é, existência de arestas que podem ser removidas do grafo sem a perda da conexidade. Ao adicionar-se uma aresta que liga os vértices 37 e 38 obtêm-se uma nova matriz Laplaciana, cujo primeiro cofator é 3, mostrando que o número de árvores geradoras é 3. Portanto, existem três configurações conexas para o grafo em questão, indicando a presença de uma redundância.

Conclui-se que é possível analisar a estrutura de uma rede de grande porte sem a necessidade de uma visão gráfica, deixando a mesma livre de desconexões e redundâncias.

Referências

[1] B. Mohar, The Laplacian Spectrum of Graphs, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications.* volume 2, 871-898, 1991.

[2] P. O. B. Netto, *Grafos: teoria, modelos, algoritmos.* Blucher, São Paulo, 2011.

[3] D. R. Mendes, *Redes de computadores: teoria e prática.* Novatec, São Paulo, 2015.

