Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Modelo de Filas M/M/1 Fracionário

Matheus de Oliveira Souza[1]
Pablo M Rodríguez[2]
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, SP

1 Introdução

O modelo de filas M/M/1 é um modelo bem conhecido e estudado na Teoria das Filas. Em particular, o modelo é um processo de nascimento e morte que pode ser interpretado da seguinte forma (ver Figura 1 para uma ilustração):

- novos clientes chegam em um sistema de acordo a um processo de Poisson de parâmetro λ, com $\lambda > 0$; isto é, o tempo transcorrido entre uma chegada e a seguinte é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ;
- o sistema tem um único servidor, o qual atende um cliente a cada vez;
- cada cliente gasta no servidor um tempo aleatório com distribuição exponencial de parâmetro $\mu > 0$, independente ao de qualquer outro cliente e ao processo de chegadas;
- em caso de chegar um novo cliente ao sistema e encontrar o servidor ocupado, este se une a uma fila única.

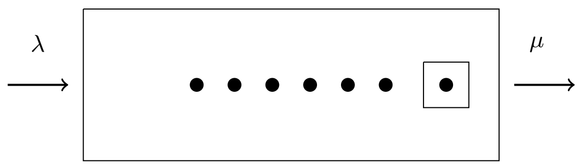

Figura 1: Ilustração de um sistema M/M/1.

Com esta interpretação, a sequência $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$, onde X_t denota o número de clientes no sistema no instante de tempo t, com $t \geq 0$, é chamada de modelo $M/M/1$. Sugerimos ao leitor consultar [2, Capítulo 8] para uma referência detalhada sobre modelos básicos

[1]matheus.oliveira.souza@usp.br
[2]pablor@icmc.usp.br

de Teoria das Filas. Este trabalho propõe o estudo de propriedades e aplicações do modelo de filas M/M/1 e da generalização deste, por meio do uso de derivadas fracionárias, proposta em [1] e conhecida como modelo de filas M/M/1 fracionário. Após uma revisão de propriedades, o estudo inclui uma discussão sobre os métodos e algoritmos propostos em [1] para estimar os valores dos parâmetros envolvidos no processo fracionário.

2 Primeiros Passos e Desenvolvimento

Dado que o modelo de filas M/M/1 $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo, podemos escrever suas equações progressivas de Kolmogorov. Para isso vamos adotar a notação de [1]: isto é $p_k := P\left(X_t = k | X_0 = i\right)$, $k \geq 0$. Assim:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p_k(t) = -(\lambda+\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t), k \geq 1 \\ \frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_k(0) = \delta_{k,i}, \end{cases} \tag{1}$$

onde $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é o número inicial de indivíduos na fila e $\delta_{k,i}$ é o delta de Kronecker. O modelo de fila M/M/1 fracionário, que denotamos por $(X_t^\alpha)_{t\in[0,\infty)}$ é definido em [1] através da aplicação da derivada fracionária de Caputo D_t^α, $\alpha \in (0,1]$, com relação ao tempo t. Mais precisamente, denotando $p_k^\alpha(t) := P\left(X_t^\alpha = k | X_0^\alpha = i\right)$, $k \geq 0$, se assume que o processo fracionário é tal que satisfaz as seguintes equações progressivas de Kolmogorov generalizadas, para $\lambda > 0$, $\mu > 0$ e $t \geq 0$:

$$\begin{cases} D_t^\alpha p_k^\alpha(t) = -(\lambda+\mu)p_k^\alpha(t) + \lambda p_{k-1}^\alpha(t) + \mu p_{k+1}^\alpha(t), k \geq 1 \\ D_t^\alpha p_0^\alpha(t) = -\lambda p_0^\alpha(t) + \mu p_1^\alpha(t) \\ p_k^\alpha(0) = \delta_{k,i}, \end{cases} \tag{2}$$

Neste trabalho serão revisadas as propriedades dos modelos M/M/1 (fracionário) e realizada uma discussão de exemplos e possíveis generalizações para o modelo M/M/k.

Agradecimentos

O presente trabalho é parte do projeto de Iniciação Científica de Matheus de Oliveira Souza, quem agradece ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] D. O. Cahoy, F. Polito and V. Phoha, Transient Behavior of Fractional Queues and Related Processes, *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 17:739–759, 2015. DOI: 10.1007/s11009-013-9391-2.

[2] S. M. Ross. *Introduction to Probability Models*, 10th Ed., Academic Press, 2010.