

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Estudo da Estabilidade do Modelo Compartmental SIRC Fracionário

Ana Carla Ferreira Nicola Gomes<sup>1</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, FURG, Rio Grande, RS

Adriano De Cezaro<sup>2</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, FURG, Rio Grande, RS

**Resumo.** Este trabalho tem como enfoque o modelo compartmental SIRC estabelecido em [6], o qual, estenderemos para o caso em que a dinâmica é regida por derivadas de ordem fracionária. Com tal abordagem, objetivamos a observação dos efeitos da memória epidemiológica no PVI fracionário, tendo em vista a não localidade dos operadores fracionários. Focamos aqui na análise dos pontos de equilíbrio e de estabilidade para o Modelo Compartmental SIRC Fracionário.

**Palavras-chave.** Cálculo Fracionário, Modelo Compartmental SIRC, Estabilidade, Epidemiologia;

### 1 Introdução

Segundo a revista do Sistema Único de Saúde do Brasil, *Epidemiologia e Serviços de Saúde*, vários panoramas tem se mostrado preocupantes como potenciais epidemias, o vírus Zika, a Dengue e a Febre Amarela são alguns exemplos. Sazonalmente, diversas formas de influências também têm chamado a atenção das autoridades de saúde [3].

Cada vez mais os estudos sobre epidemiologia tem se desprendido da área das ciências da saúde e adentrado nas pesquisas baseadas em modelos preditivos envolvendo conhecimentos estatísticos, computacionais e matemáticos.

Neste trabalho estudamos o modelo compartmental SIRC [6], utilizando ordem fracionária em suas derivadas, objetivando a observação dos efeitos da memória epidemiológica no sistema [1]. Tal efeito deve ser interpretado como a capacidade do sistema imune adaptativo de propiciar respostas mais eficientes quando ocorre exposição à antígenos encontrados previamente, seja na forma de exposição natural ou vacinas. Nossa abordagem se diferencia de outros estudos com esse propósito [2], por utilizar operadores diferenciais fracionários para caracterizar os efeitos de memória. Em particular, neste trabalho estudaremos a estabilidade do modelo SIRC fracionário.

---

<sup>1</sup>anagomes.mat@gmail.com

<sup>2</sup>adrianocezaro@furg.br

## 2 Conceitos Preliminares

Nesta seção fazemos um pequeno apanhado de resultados importantes para esse estudo, apresentamos algumas considerações sobre a solução de problemas de valor inicial (PVI) fracionários.

Considere um PVI fracionário  $n$ -dimensional,

$$D_*^\theta(u(t)) = \Lambda u(t), \quad D^k u(0) = u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (1)$$

onde  $D_*^\theta$  é o operador de derivada segundo Caputo [5],  $\Lambda$  é uma matriz  $n \times n$  constante arbitrária. Assumindo que  $\lambda_j$  com  $(j = 1, 2, \dots, n)$  sejam os autovalores de  $\Lambda$  e  $y^{(1)}, \dots, y^{(j)}$  seus autovetores correspondentes. Então, a solução geral do PVI (1) tem a forma

$$u(t) = \sum_{l=1}^j c_l y^{(l)} E_\theta(\lambda_l t^\theta), \quad \text{com} \quad E_\theta(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\Gamma(j\theta + 1))^{-1}. \quad (2)$$

com certas constantes  $c_l \in \mathbb{C}$ . A função  $E_\theta(z)$  é a chamada função de Mittag-Leffler.

**Teorema 2.1.** [5, Teorema 4.4, p. 71] *Seja  $\theta > 0$ . Então, a função de Mittag-Leffler possui o seguinte comportamento assintótico: i) a função  $E_\theta(re^{i\phi}) \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$  se  $|\phi| > \theta\pi/2$ ; ii) a função  $E_\theta(re^{i\phi})$  permanece limitada para  $r \rightarrow \infty$  se  $|\phi| = \theta\pi/2$ ; iii) a função  $|E_\theta(re^{i\phi})| \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow \infty$  se  $|\phi| < \theta\pi/2$ .*

**Teorema 2.2.** [5, Teorema 7.20, p. 158] *Considere o PVI (1) com  $u^k(0) = 0$ . Então: i) a solução  $u(t) = 0$  do PVI (1) é assintoticamente estável se, e somente se, todos autovalores  $\lambda_j$  com  $(j = 1, 2, \dots, n)$  de  $\Lambda$  satisfaz  $|\arg(\lambda_j)| > \theta\pi/2$ ; ii) a solução  $u(t) = 0$  do sistema é estável se, e somente se, os autovalores satisfizerem  $|\arg(\lambda_j)| \geq \theta\pi/2$  e todos os autovalores com  $|\arg(\lambda_j)| = \theta\pi/2$  têm uma multiplicidade geométrica que coincide com a sua multiplicidade algébrica.*

## 3 Modelo Matemático

Neste trabalho estudaremos a generalização do modelo SIRC proposto por Casagrandi [6], em que a dinâmica é dada por operadores de ordem fracionária do tipo Caputo:

$$\begin{aligned} D_*^\theta(S(t)) &= \mu(N - S(t)) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) \\ D_*^\theta(I(t)) &= \beta S(t)I(t) + \sigma\beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \\ D_*^\theta(R(t)) &= (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - (\mu + \delta)R(t) \\ D_*^\theta(C(t)) &= \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t). \end{aligned} \quad (3)$$

No PVI fracionário (3), o parâmetro  $\mu > 0$  é a taxa de mortalidade e natalidade,  $\alpha > 0, \delta > 0, \gamma > 0$  são o inverso do tempo em que os indivíduos ficam no compartimentos I, R e C, respectivamente,  $\sigma > 0$  é a probabilidade média de reinfeção e  $\beta > 0$  é o contato entre os compartimentos S e I. Ainda, as quantidades  $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$  e  $C(0) = C_0$  são as condições iniciais para o PVI fracionário (3). Já  $N = S + I + R + C$ ,

representando o total da população, e  $\theta \in ]0, 1]$  é a ordem da derivada. Resultados de boa colocação do PVI fracionário (3), com as condições iniciais acima podem ser encontrados em [1].

É importante ressaltar que quando  $\theta_j = 1$  PVI fracionário (3) é o modelo proposto por [6], que trouxe uma inovação para a epidemiologia matemática, agregando aos modelos do tipo SIR, bem conhecidos na literatura, um novo compartimento  $C$ , intitulado imunidade cruzada, o qual contempla o efeito de imunidade parcial que existe nas doenças que sofrem mutações. Por isso, o modelo SIRC torna-se mais efetivo para descrever doenças como a Influenza A e outras, onde os efeitos de imunidade parcial temporária são de grande importância [4].

Nossa proposta é inovadora no sentido que considera ainda os efeitos de memória em cada um dos compartimentos, obtida a partir do uso de derivadas de ordem fracionária [1].

## 4 Resultados e Discussões

Considere o PVI fracionário (3). A matriz jacobiana  $J(f)$  (onde  $f$  é a função vetorial do lado direito no PVI fracionário (3)) é dada por:

$$J(f) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I(t) & -\beta S(t) & 0 & \gamma \\ \beta I(t) & \beta S(t) + \sigma \beta C(t) - (\mu + \alpha) & 0 & \sigma \beta I(t) \\ 0 & (1 - \sigma)\beta C(t) + \alpha & -(\mu + \delta) & (1 - \sigma)\beta I(t) \\ 0 & -\beta C(t) & \delta & -\beta I(t) - (\mu + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Abaixo apresentaremos resultados de estabilidade do PVI fracionário (3) linearizado [1]. Portanto, trabalharemos sempre com relação a linearização do PVI fracionário (3) usando  $J(f)$  calculada acima.

Primeiramente, vamos verificar que o PVI fracionário (3) se encaixa nas hipóteses dos resultados de estabilidade apresentados nos Teoremas 2.1 e 2.2. Para tanto, considere  $f(t, u(t))$  a função vetorial lado direito do PVI fracionário (3), para  $u(t); (S(t), I(t), R(t), C(t))$ . O primeiro passo é mostrar o seguinte Lema.

**Lema 4.1.** *Considere o PVI fracionário (3), e  $f(t, u(t))$  como acima. Então temos que  $f(t, 0) = 0$ .*

*Demonstração.* De fato, como  $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$  e  $C(0) = C_0$ , temos que  $N(0) = S_0 + I_0 + R_0 + C_0$ . Assim, se  $[S(0), I(0), R(0), C(0)]^T = 0$  segue da definição de  $f$  que  $f(t, 0) = [0, 0, 0, 0]^T$ .  $\square$

O segundo passo é encontramos os pontos de equilíbrio do PVI fracionário (3). Para tal, basta fazermos (veja [5])  $D_*^\theta(S(t)) = D_*^\theta(I(t)) = D_*^\theta(R(t)) = D_*^\theta(C(t)) = 0$ . Assim, temos que:

$$0 = \mu(N - S(t)) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) \tag{4}$$

$$0 = \beta S(t)I(t) + \sigma \beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \tag{5}$$

$$0 = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - (\mu + \delta)R(t) \tag{6}$$

$$0 = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t). \tag{7}$$

4

De (5):

$$\beta S(t)I(t) + \sigma\beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) = 0 \tag{8}$$

Temos duas possibilidades para (8), sendo elas,  $I(t) = 0$  ou  $I(t) \neq 0$ . Primeiro encontraremos o ponto de equilíbrio livre de doença,  $I(t) = 0$ . Neste caso,

$$\mu N - \mu S(t) + \gamma C(t) = 0, \tag{9}$$

$$-(\mu + \delta)R(t) = 0, \tag{10}$$

$$\delta R(t) - (\mu + \gamma)C(t) = 0. \tag{11}$$

De (10), temos que:

$$-(\mu + \delta)R(t) = 0 \Rightarrow R(t) = 0. \tag{12}$$

Substituindo (12) em (11), obtemos:

$$\delta R(t) - (\mu + \gamma)C(t) = 0 \Rightarrow C(t) = 0. \tag{13}$$

Da substituição de (13) em (9), resulta que:

$$\mu N - \mu S(t) + \gamma C(t) = 0 \Rightarrow \mu S(t) = \mu N \Rightarrow S(t) = N. \tag{14}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio livre da doença é  $P_1 = [N, 0, 0, 0]$ . Aplicando  $P_1$  na jacobiana do PVI fracionário (3) e fazendo o estudo dos autovalores do sistema reduzido, temos:

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta N & 0 & \gamma \\ 0 & \beta N - (\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são, respectivamente,

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = -\alpha + \beta N - \mu, \quad \lambda_3 = -\gamma - \mu \text{ e } \lambda_4 = -\delta - \mu. \tag{15}$$

Agora encontraremos o ponto de equilíbrio com doença,  $I(t) \neq 0$ ,  $P_1 = [S^*, I^*, R^*, C^*]$ . Como  $I(t) \neq 0$  de (5) temos:

$$S^* = (\mu + \alpha)\beta^{-1} - \sigma C^*. \tag{16}$$

De (6):

$$R^* = ((1 - \sigma)\beta C^* I^* + \alpha I^*)(\mu + \delta)^{-1}. \tag{17}$$

Substituindo (17) em (7):

$$C^* = \delta\alpha I^*(\beta I^*(\mu + \sigma\delta) + (\mu + \gamma)(\mu + \delta))^{-1}. \tag{18}$$

Substituindo (18) em (17):

$$R^* = (\alpha I^*(\beta I^* + \mu + \gamma))((\mu + \sigma\delta)\beta I^* + (\mu + \gamma)(\mu + \delta))^{-1}. \tag{19}$$

De (18) em (16):

$$S^* = (\mu + \alpha)\beta^{-1} - \sigma \left( \delta\alpha I^*(\beta I^*(\mu + \sigma\delta) + (\mu + \gamma)(\mu + \delta))^{-1} \right). \tag{20}$$

Para encontrar uma expressão para  $I^*$ , substituiremos (20) e (18) em (4), arrumando os termos da equação ficamos com:

$$\beta^2\mu[\mu + \sigma\delta + \alpha]I^{*2} + \beta\mu[-\beta\mu N + \gamma[\mu + \delta + \alpha] + \delta\sigma(-\beta N + \mu) + (2\mu + \delta)(\mu + \alpha)]I^* (21) + \mu(\mu + \gamma)(\mu + \delta)(\mu + \alpha)[1 - N\beta(\mu + \alpha)^{-1}] = 0.$$

Assim,  $I^*$ , é a raiz positiva do polinômio (21).

Aplicando  $P_2$  na jacobiana do PVI fracionário (3):

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I^* & -\beta S^* & 0 & \gamma \\ \beta I^* & \beta S^* + \sigma\beta C^* - (\mu + \alpha) & 0 & \sigma\beta I^* \\ 0 & (1 - \sigma)\beta C^* + \alpha & -(\mu + \delta) & (1 - \sigma)\beta I^* \\ 0 & -\beta C^* & \delta & -\beta I^* - (\mu + \gamma) \end{bmatrix}.$$

E fazendo o estudo dos autovalores do sistema reduzido aplicado no ponto  $P_2$  encontramos as seguintes raízes:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = (A - \sqrt{B})/2, \quad \lambda_3 = (A + \sqrt{B})/2 \text{ e } \lambda_4 = -\beta I^* - \mu. \tag{22}$$

Onde, em (22)  $A = -\delta - \gamma - \beta I^* - 2\mu$  e  $B = (\delta - \gamma)^2 + (\beta I^* - 3\delta)^2 + 2\beta I^*(\gamma + 2\delta\sigma) - 9\delta^2$ . Podemos então concluir que:

**Teorema 4.1.** *Considere as escolhas dos parâmetros deste trabalho, tais que,  $B \in \mathbb{R}_+$  e  $\sqrt{B} < -A$ , ou  $B \in \mathbb{R}_-$ . Em ambos os casos tanto o ponto  $P_1$  quanto o ponto  $P_2$  são assintoticamente estáveis.*

*Demonstração.* Como todos os parâmetros são positivos, segue que o único valor dado por (22) que pode apresentar problema é  $\lambda_3$ . No entanto, pelas hipóteses em  $A$  e  $B$ , temos que  $\lambda_3$  também satisfaz as hipóteses do Teorema (2.2).  $\square$

Por fim, encontraremos a taxa de reprodutividade basal, que denotaremos por  $R_0$ . Essa taxa é definida como o número médio de infecções secundárias produzidas quando um indivíduo infectado é introduzido em uma população inteiramente suscetível. Prova-se que, caso  $R_0 < 1$  a epidemia entrará em extinção, enquanto, para  $R_0 > 1$  é esperado que a doença nunca desapareça [4]. Por simplicidade faremos  $N = 1$ , haja visto que por hipótese a população é constante. Disto temos que  $R_0$  é dado por:

$$-\alpha + \beta - \mu < 0 \Rightarrow \beta(\mu + \alpha)^{-1} < 1 \Rightarrow R_0 = \beta(\mu + \alpha)^{-1}. \tag{23}$$

Agora apresentaremos alguns testes numéricos a respeito dos pontos de estabilidade do PVI fracionário (3) e também com relação a variações de  $R_0$  com relação as variações do parâmetro  $\alpha$  no PVI fracionário (3). Em todos os testes numéricos utilizaremos os parâmetros do modelo SIRC utilizados em [6], os quais foram obtidos a partir de dados de Influenza.

**Exemplo 1:** para a primeira simulação usamos os seguintes parâmetros:  $\mu = 0,02$ ,  $\alpha = 52,14$ ,  $\delta = 0,75$ ,  $\gamma = 0,35$ ,  $\sigma = 0,12$ ,  $\beta = 1,355$  e uma população de  $N = 100$ . Ainda, usaremos o valor da derivada de ordem fracionária  $\theta = 0,8$  e condições iniciais dadas por  $S(0) = 80$ ,  $I(0) = 20$ ,  $R(0) = 0$  e  $C(0) = 0$ . Substituindo estes valores na equação (22), temos que os valores dos autovalores são, respectivamente,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -0,755039 - 0,493992i$ ,  $\lambda_3 = -0,755039 + 0,493992i$  e  $\lambda_4 = -0,390078$ . Percebemos que todos os autovalores satisfazem  $|\arg(\lambda_j)| > \theta\pi/2$  para  $(j = 1, \dots, 4)$ . Logo, pelo Teorema 2.2, a solução do PVI fracionário (3) é assintoticamente estável. Calculando  $R_0$  como em (23), obtemos  $R_0 = 0,02$ . Portanto é esperado que a doença tenda a extinção.

A Figura 1(a) representa a situação modelada para o Exemplo 1. É possível notar que a população de infectados começa a diminuir logo após o início da simulação e tende para zero com o passar do tempo, conforme o esperado, haja visto que  $R_0 = 0,02$  neste exemplo.

**Exemplo 2:** agora usaremos todos os parâmetros e condições iniciais como no Exemplo 1 e, somente mudaremos o valor de  $\alpha$  para  $\alpha = 0,0341$ . Novamente, substituindo esses valores na equação (22), temos que os valores dos autovalores são, respectivamente,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -103,457$ ,  $\lambda_3 = -1,4368$  e  $\lambda_4 = -103,774$ . Desta forma, todos os autovalores satisfazem  $|\arg(\lambda_j)| > \theta\pi/2$  para  $(j = 1, \dots, 4)$ . Logo, pelo Teorema 2.2, a solução do PVI fracionário (3) é assintoticamente estável. Para tal valor de  $\alpha$ , obtemos que  $R_0 = 25,09 > 1$ .

A Figura 1(b) representa a situação modelada para o Exemplo 2. Note que, neste caso, embora tenhamos estabilidade assintótica (lembre que mudando  $\alpha$  o ponto de estabilidade também muda), a população de infectados cresce, ou seja, a doença não cai para extinção, conforme previsto, dado o valor de  $R_0 = 25,09 > 1$ .

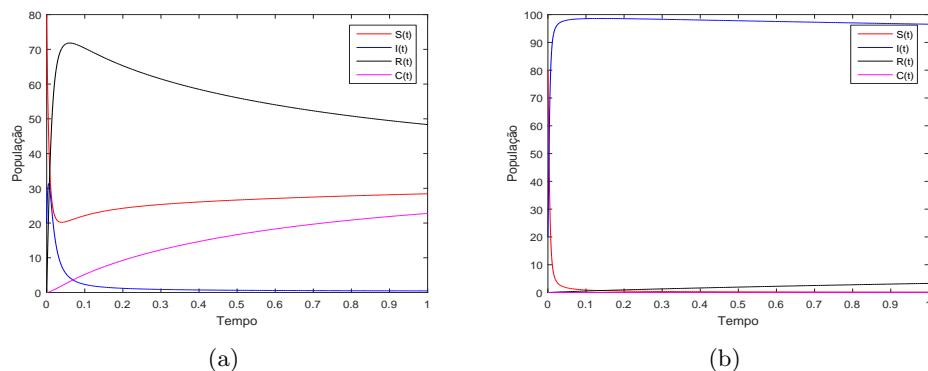


Figura 1: Simulações para  $\theta = 0,8$ .

## 5 Conclusões

Neste trabalho analisamos a estabilidade do do PVI fracionário (3), usando derivadas de ordem fracionária segundo Caputo. Apresentamos explicitamente os autovalores associados com o problema linearizado associado aos pontos de estabilidade do PVI fracionário (3), mostrando que é assintoticamente estável nas hipóteses deste trabalho. Ainda calculamos de forma explícita a taxa de reprodutividade basal  $R_0$ .

Finalmente, analisamos o comportamento numérico do PVI fracionário (3) para o caso da ordem da derivada fracionária ser  $\theta = 0,8$ , a partir de parâmetros conhecidos na literatura [6], permitindo variar somente  $\alpha$ . O objetivo neste caso é de observar o que acontece quando  $R_0$  oscila, mostrando como funciona a dinâmica do sistema quando a doença persiste  $R_0 > 1$  e quando ela será extinta  $R_0 < 1$ .

A escolha de estudar o PVI fracionário (3) com  $\theta_j$  iguais, implica na hipótese de que a memória epidemiológica está sendo considerada a mesma em todas linhas do sistema. Essa hipótese pode não ser a mais realista e por isso pretendemos futuramente estudar (3) usando ordens de derivada diferentes para cada linha do sistema.

## Agradecimentos

Ao PPGMC, a FURG e a CAPES.

## Referências

- [1] A. C. F. N. Gomes e A. De Cezaro, Um estudo sobre a memória epidemiológica: modelo SIRC fracionário, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 10:194–210, 2017. ISSN:2316-9664.
- [2] A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. A. O'Callaghan, A. V. Pokrovskii, and D. Rachinskii, Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 7:204-226, 2012. DOI:10.1051/mmnp/20127313.
- [3] F. J. De Paula Júnior, A. S. D. Matta, R. Jesus, R. P. Guimarães, L. R. O. Souza e J. L. Brant, Sistema gerenciador de ambiente laboratorial-GAL: avaliação de uma ferramenta para a vigilância sentinela de síndrome gripal, Brasil, 2011-2012, *Epidemiologia e Serviços de Saúde*, 26:339-348, 2017. DOI:10.5123/s1679-49742017000200011.
- [4] H. M. Yang. *Epidemiologia matemática: estudos dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta*. Editora da Unicamp, Campinas, 2001.
- [5] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer, 2010.
- [6] R. Casagrandi and L. Bolzoni, S. A. Levin and V. Andreasen, The SIRC model and influenza A, *Mathematical Biosciences*, 200:152-169, 2006. DOI:10.1016/j.mbs.2005.12.029.