Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

As Várias Versões do Teorema dos Quatro Vértices

Ailton Cezar Alves[1]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Angela Leite Moreno [2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

A Geometria Diferencial, pelo menos em sua forma moderna, desenvolveu-se nas décadas iniciais do século XVIII, com aplicações do Cálculo Diferencial e Integral à Geometria Analítica. Sendo um dos protagonistas dos teoremas clássicos da Geometria Diferencial na Teoria de Curvas, o Teorema dos Quatro Vértices, abreviadamente TQV, possui elevada importância dentro do contexto das aplicações da referida teoria, necessitando apenas de argumentos estudados nos cursos de Cálculo. Deste modo, o TQV serve de pretexto para a utilização de ferramentas matemáticas poderosas, sendo que muitas envolvem ideias ou conceitos que podem ser generalizados em contextos mais complexos, como curvas em superfícies ou para dimensões mais altas. Em seu trabalho [1] discute que essas ideias surgem em várias situações, tais como: contato entre curvas, singularidades de aplicações, homotopia, deformação e número de voltas, funções periódicas e equações diferenciais ordinárias.

Aqui discutiremos sucintamente algumas versões do TQV. Esse teorema, de acordo [2], afirma que uma curva planar, regular, fechada e sem auto-interseção, diferente da circunferência, deve possuir pelo menos quatro pontos onde sua curvatura tem pontos críticos (vértices). Esse teorema é um dos primeiros resultados mais globais da Geometria Diferencial e tem uma ampla abordagem, seja analítica ou geométrica, revelando novos aspectos e propriedades interessantes sobre as curvas.

Com base em [3], discutimos algumas das demonstrações para o TVQ, tais como: duas versões analíticas; a de Guggenheimer utilizando Círculos bitangentes; e a demonstração de Osserman utilizando Círculos circunscritos. A ideia geral de uma das provas analíticas é considerar a função $f(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} - \frac{L}{2\pi}$, em que $k(\theta) = \frac{d\theta}{ds}$ e L é o comprimento da curva. Podemos perceber que os pontos críticos de f coincidem com os pontos críticos de k, ou seja, os vértices da curva. Para encontrar os vértices, a ideia é provar que f troca de sinal pelo menos quatro vezes e utilizar o Teorema do Valor Médio para concluir que f tem pelo menos quatro pontos críticos, ou seja, γ tem quatro vértices. Proposta por Guggenheimer em 1969, demonstramos também o TVQ, agora sem a hipótese de convexidade, utilizando para isso círculos bitangentes, essa foi uma das provas geométricas do TQV.

E por último temos a prova de Osserman, obtida em 1985, que mostraremos a seguir, mas, para isso, precisamos inicialmente enunciar alguns lemas essenciais para sua dedução.

Lema 0.1. *Se C é um círculo circunscrito ao compacto K, então todo arco de C de comprimento maior que o de um semicírculo intersecta K.*

[1]ailtonc.alves8@gmail.com
[2]angela.moreno@unifal-mg.edu.br

Lema 0.2. *Suponhamos que γ seja uma curva regular C^2 de curvatura $k \neq 0$ orientada e C um círculo de raio de curvatura R tangente a γ no ponto p. Então:*

(i) *se $k(p) > \frac{1}{R}$ então uma vizinhança de p em γ estará contida no interior da região delimitada por C.*

(ii) *Se $k(p) < \frac{1}{R}$ então uma vizinhança de p em γ estará contida no exterior de C .*

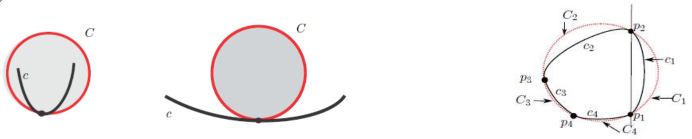

Figura 1: À esquerda temos a representação da posição relativa e da curvatura em relação ao círculo circunscrito. À direita temos o círculo circunscrito e os vértices.

Teorema 0.1. *Seja γ uma curva de Jordan de classe $\mathcal{C}^2$ no plano $\mathbb{R}^2$. Denotamos por C o círculo circunscrito a γ. Então:*

(i) *$\gamma \cap C$ contém pelo menos dois pontos.*

(ii) *Se $\gamma \cap C$ contém pelo menos n pontos, então γ possui pelo menos $2n$ vértices.*

Demonstração: Aqui faremos a prova para curvas convexas. Consideremos uma curva de Jordan γ, temos que essa curva divide o plano em duas componentes conexas A e B, sendo A limitada e B não limitada tais que $A \cap B = \gamma$. Temos que (i) segue diretamente do Lema 0.1, pois o conjunto $\bar{A} \cup \gamma$ é compacto e difeomorfo a um círculo.

Agora provaremos (ii), para isso consideremos os pontos $p_1, \ldots, p_n \in \gamma \cap C$. Ordenando ciclicamente esses pontos obtemos n arcos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de γ e arcos $C_1, ..., C_n$ correspondentes em C. Logo, cada um dos arcos γ_i coincide com C_i ou contém um ponto q_i tal que $k(q_i) < \frac{1}{R}$. Pelo Lema 0.2 temos que $k(p_i) \geq \frac{1}{R}$, para todo $i = 1, ..., n$. Portanto k possui um mínimo em pontos interiores de q_i' pertencente γ_i e $k(q_i') < \frac{1}{R}$. Deste modo obtemos n vértices satisfazendo a desigualdade acima. Por outro lado cada subarco $\gamma_i' \subset \gamma$ ligando q_i a q_{i+1} contém o ponto p_{i+1}. Tendo em vista as desigualdades $k(q_i) < \frac{1}{R}$ e $k(p_i) \geq \frac{1}{R}$ existe um ponto p_k' pertencente γ_k', em que k tem um máximo e $k(p_k') \geq \frac{1}{R}$. Assim obtemos outros n vértices. ■

Nosso próximo passo será estudar algumas demonstrações da recíproca do Teorema dos Quatro Vértices, bem como suas possíveis generalizações. Dentre essas generalizações, temos interesse especial nas versões para curvas em superfícies ou para dimensões mais altas, trabalhando com diversos tipos de espaços.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG e à UNIFAL-MG.

Referências

[1] M. P. Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 5. ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[2] M. J. D. Carneiro e R. A. Garcia.O Teorema dos Quatro Vértices e Sua Recíproca. *Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, IMPA/UFRJ, Rio de Janeiro, 2017.

[3] J. R. V. Coimbra. *Uma Introdução à Geometria Diferencial.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática Aplicada, Unicamp, (2008).