Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre os Métodos de Newton e das Raízes Múltiplas

Quezia Emanuelly de Oliveira Souza [1]
Marcos Denilson Barbosa dos Santos[2]
João Victor Medeiros Rocha[3]
Ivan Mezzomo[4]
Matheus da Silva Menezes[5]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

1 Resumo

Este trabalho visa comparar os métodos de Newton com as raízes múltiplas. Segundo [1], o método das raízes múltiplas é uma melhoria do método de Newton, criado no intuito de acelerar a convergência para raízes de funções com multiplicidade .

De acordo com [1], o método de Newton-Raphson é um dos mais utilizados no cálculo de raízes de funções e sua convergência é quadrática para $f'(x) \neq 0$. Sua função de iteração é dada por $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. Nos casos que a primeira derivada é nula, o método de Newton perde eficiência, tornando sua convergência linear. A fim de solucionar esse problema, os matemáticos Ralston e Rabinowitz desenvolveram uma função $u(x)$, tal que $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, que possui as mesmas raízes de $f(x)$. Aplicando $u(x)$ no Método de Newton, obtemos o método das raízes múltiplas, capaz de encontrar raízes com multiplicidade com convergência pelo menos quadrática. A função de iteração é dada por

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{f'(x_i)^2 - f"(x_i)f(x_i)} \tag{1}$$

Iremos analisar o número de iterações, o valor da raíz calculada $\bar{x}$ e o erro relativo $E_R = \frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}$ [2]. Considere x_0 o valor inicial, escolhido arbitrariamente, tendo como critérios de parada $|f(x_k)| < \varepsilon$, com precisão de $\varepsilon = 10^{-4}$. Utilizamos nos experimentos a linguagem de programação C no compilador Dev $C++$. As funções analisadas possuem as seguintes características:

[1]quezia.emanuelly99@gmail.com
[2]denilsonb20@hotmail.com
[3]jonny.medeiros@hotmail.com
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]matheus@ufersa.edu.br

Função 1: $f(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 32x - 32$, possui raízes -4 (multiplicidade 2), -1 e 2;
Função 2: $f(x) = x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 500x^2$, possui raízes 0 (multiplicidade 2), 5 e 10 (multiplicidade 2);
Função 3: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$, possui raiz 3 (multiplicidade 4);
Função 4: $f(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$, possui raízes 0 e 1(multiplicidade 4);
Função 5: $f(x) = x^5 - 17x^4 - 106x^3 - 290x^2 + 325x - 125$, possui raízes 1 (multiplicidade 2) e 5 (multiplicidade 3).

Tabela 1: Resultados dos experimentos realizados

	Método	x	x_0	# Iter	$\bar{x}$	E_R
Função 1	Newton	2	4	7	2.0000000000	0
	Raízes multiplas	2	4	9	2.0000000000	0
Função 2	Newton	5	6	4	5.0000000000	0
	Raízes múltiplas	5	6	154	5.0000000000	0
Função 3	Newton	3	-7	18	2.9436228989	1.9152×10^{-2}
	Raízes múltiplas	3	-7	1	3.0000000000	0
Função 4	Newton	1	8	18	1.0727076111	6.7779×10^{-2}
	Raízes múltiplas	1	8	3	0.9999790307	2.0969×10^{-5}
Função 5	Newton	5	15	20	5.0091962865	1.8358×10^{-3}
	Raízes múltiplas	5	15	4	4.9999580594	8.3881×10^{-6}

Analisando a tabela, notamos que todas as funções convergiram para uma raiz. Nas funções 1 e 2, onde a raiz estudada não possui multiplicidade, o método de Newton se mostra mais eficiente convergindo para a raiz da função com menor número de iterações . Na função 2 uma possível explicação para a enorme discrepância no número de iterações é a simetria em relação ao intervalo entre as raízes. Nas funções 3, 4 e 5, casos em que a raiz possui multiplicidade, o método das raízes múltiplas mostrou-se mais eficiente que o método de Newton tanto no erro relativo quanto no número de iterações, que acelerou a convergência entre 80% a 94,44%.

Uma característica do método das raízes múltiplas observada na função 3 é que, em funções que possuem apenas uma raiz, $f(x) = (x-r)^m$, onde r é a raiz e m a multiplicidade irá convergir na primeira iteração, independente da raiz e multiplicidade em questão. A partir desses resultados vemos que a modificação feita no método de Newton-Raphson, é uma alternativa válida, de rápida convergência no cálculo de raízes de funções que possuam multiplicidade, apesar de apresentar alto custo computacional devido às duas derivadas.

Referências

[1] S. C. Chapra and R. P. Canale. *Metodos Numéricos para Engenharia.* 5. ed., Bookman, São Paulo, 2011.

[2] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. *Calculo Numérico, aspectos teoricos e computacionais.* 2. ed., Pearson, São Paulo, 1997.

