

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução Numérica das Equações de Saint Venant Utilizando um SBRF

Edmilson Paulo de Oliveira¹

Doutorando em Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp, Campinas, SP

Rosana Sueli da Motta Jafelice²

Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia, MG

Marcos Antônio da Câmara³

Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia, MG

Resumo. Diversas áreas do conhecimento científico se valem das equações diferenciais para modelar fenômenos. Muitas vezes, tais equações dependem de parâmetros que não podem ser obtidos de forma prática ou que apresentam incertezas e imprecisões nos processos de sua determinação. Nessa conjuntura, este trabalho objetiva estudar a incerteza que reside no processo de escoamento de águas em rios, utilizando as Equações de Saint Venant. A incerteza nesse processo é abordada considerando-se um dos parâmetros presentes nas equações como variável de saída de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

Palavras-chave. Equações de Saint Venant; Sistema Baseado em Regras Fuzzy; Escoamento de Rios; Equações Diferenciais.

1 Introdução

Modelar matematicamente um fenômeno real requer, quase sempre, lidar com equações diferenciais. Independentemente da área que estuda esse fenômeno, o pesquisador que deseja compreendê-lo do ponto de vista matemático deparará com uma equação envolvendo derivadas das quantidades incógnitas. Quando se fala em hidráulica de canais abertos, o escoamento de rios é o primeiro assunto que vem à mente. Existem vários motivos que justificam o estudo de tal fenômeno, desde previsão de cheias a controle de erosões. Trata-se, assim, de um assunto bastante relevante. Neste contexto, as chamadas equações de Saint Venant são frequentemente utilizadas. Uma das formas sob as quais estas equações se apresentam é

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{A} \right)}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f), \end{cases} \quad (1)$$

¹edpaulo1@hotmail.com

²rmotta@ufu.br

³camara@ufu.br

em que Q é a vazão em dada seção [m³/s], A é a área chamada área molhada (área do canal onde ocorre o escoamento que está em contato com o fluido que escoar) [m²], h é a altura ou espessura da lâmina d'água [m], x é a posição ao longo do eixo do canal [m], q é a contribuição lateral por unidade de comprimento [m³/s/m], t é o tempo de escoamento [s], g é a aceleração da gravidade [m/s²], S_0 é a inclinação do canal e S_f é a perda de energia por atrito, sendo ambos S_0 e S_f adimensionais. A Figura 1 apresenta uma seção transversal genérica e exibe a área molhada da seção.

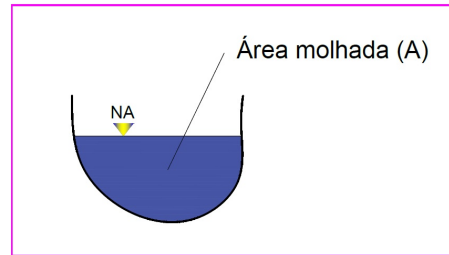


Figura 1: Seção transversal genérica de um rio e a área molhada.

Fazendo mudanças de variáveis convenientes, podemos reescrever as Equações de Saint Venant na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = R, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{Ru}{h}, \end{cases} \quad (2)$$

em que h é a altura ou espessura da lâmina d'água, x é a posição ao longo do eixo do canal, R é a contribuição lateral por unidade de área, t é o tempo de escoamento, g é a aceleração da gravidade, S_0 é a inclinação do canal e S_f é a perda de energia por atrito [4].

As equações do sistema (2) só podem ser resolvidas de maneira analítica com hipóteses simplificadoras. Diversos trabalhos resolveram o sistema simplificado com parâmetros determinísticos. Neste trabalho, porém, a contribuição lateral R é variável de saída de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) [1]. Desta forma, é possível abordar o problema do escoamento considerando a incerteza decorrente da determinação da contribuição lateral, incerteza esta refletida pelo SBRF.

2 Solução numérica das equações utilizando um SBRF

Consideremos um rio com seção transversal trapezoidal que se mantém constante ao longo de todo o canal, conforme mostrada na Figura 2.

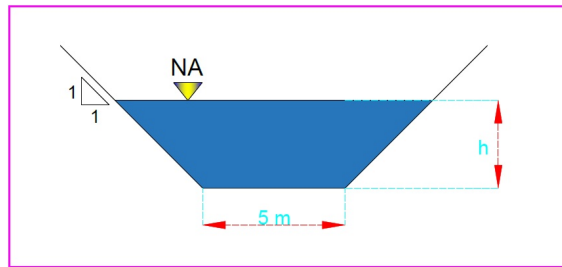


Figura 2: Seção transversal do rio estudado.

Vamos atribuir condições iniciais para a altura da lâmina d'água h e para a velocidade do escoamento u , conforme mostrado em (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x, 0) = 1 + \frac{x}{100000}, \\ h(0, t) = 1 + \frac{t}{100000}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{n} [R_h(x, 0)]^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}}, \\ u(0, t) = \frac{1}{n} [R_h(0, t)]^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (3)$$

em que n é chamado de coeficiente de Manning [2], geralmente assumido na literatura como 0,020 para canais naturais e R_h é o raio hidráulico, definido como a razão entre a área molhada e o perímetro molhado. Temos que $x \in [0, l_r]$, em que l_r é o comprimento do rio estudado, e $t \in \mathbb{R}_+$.

Utilizamos o método de Runge-Kutta para resolver o sistema de equações de Saint Venant. Analisamos um trecho de 2 km de rio e, por simplificação, supomos ainda que a perda de energia por atrito S_f é constante e igual a 0,005.

Em nossa simulação, a única forma de contribuição lateral ao escoamento é a troca de água entre o lençol freático e a lâmina d'água do rio. Neste caso, o valor da contribuição depende basicamente de dois fatores: a porosidade do solo sobre o qual o rio escoar e a diferença entre o nível do lençol e a altura da lâmina d'água.

Assim, construímos um SBRF cujas variáveis de entrada são “porosidade” e “diferença entre o nível do lençol freático e a altura da lâmina d'água”, à qual nos referimos de maneira simplificada por “diferença de altura” [3]. A variável de saída é “contribuição lateral”. Os gráficos das funções de pertinência para as variáveis do SBRF são apresentados nas Figuras 3, 4 e 5. A construção do SBRF é feita com o auxílio de um especialista na área de Hidráulica e Mecânica dos Fluidos. A base de regras definida para o SBRF é mostrada na Tabela 1. O método de inferência adotado é o de Mamdani e o método de defuzzificação é o do centroide.

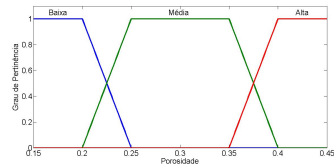


Figura 3: Funções de pertinência da variável de entrada “porosidade”.

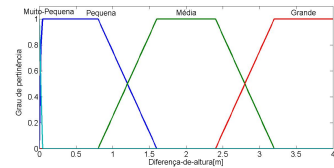


Figura 4: Funções de pertinência da variável de entrada “diferença de altura”.

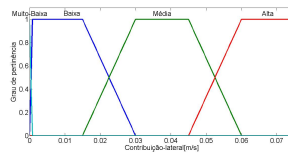


Figura 5: Funções de pertinência da variável de saída “contribuição lateral”.

Tabela 1: Base de regras para o SBRF.

Diferença de altura \ Porosidade	Porosidade		
	Baixa	Média	Alta
Muito Pequena	Muito Baixa	Muito Baixa	Muito Baixa
Pequena	Baixa	Baixa	Baixa
Média	Baixa	Média	Média
Grande	Média	Alta	Alta

3 Resultados

Adotamos a inclinação do leito constante e igual a $S_0 = 0,03$. Apresentamos os resultados obtidos para dois valores de porosidade, $p = 0,20$ e $p = 0,30$. Uma vez que a altura da lâmina d’água varia com o tempo e com a posição da seção, fixamos dois valores para o nível do lençol freático, $N_L = 2,5$ m e $N_L = 4,5$ m. Assim, para cada seção e para cada iteração de tempo, a diferença de altura é calculada e o valor da contribuição lateral é obtido pelo SBRF.

3.1 Soluções obtidas para Porosidade $p = 0,20$

- $N_L = 2,5$ m

Observamos que ocorre aumento da altura da lâmina d’água conforme o tempo passa, exceto nas seções iniciais do canal. Nestas seções, observa-se diminuição da altura. Com relação à velocidade, observamos aumento nos valores conforme o tempo passa. Em ambas

as variáveis (altura e velocidade), podemos notar que seções mais ao fim do canal apresentam valores mais elevados, ou seja, há uma variação positiva tanto na altura quanto na velocidade com relação ao eixo do canal.

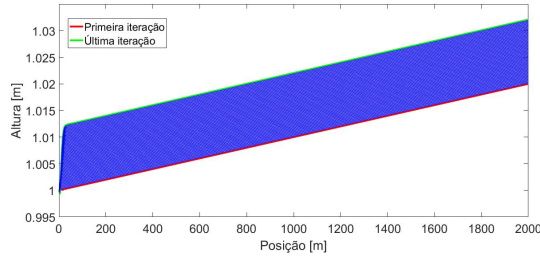


Figura 6: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.

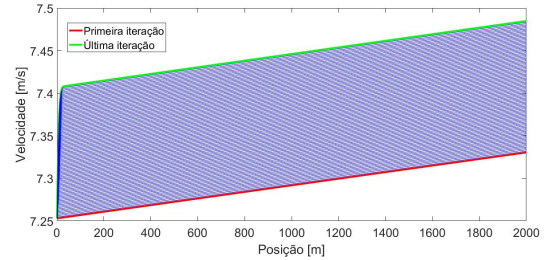


Figura 7: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.

- $N_L = 4,5$ m

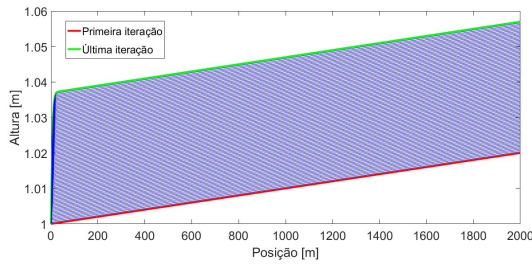


Figura 8: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.

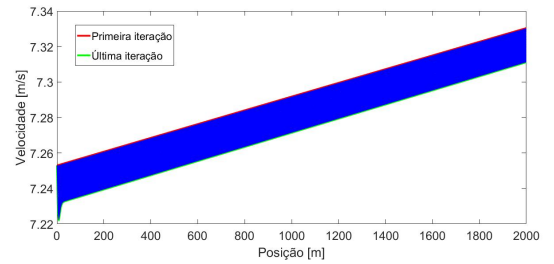


Figura 9: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.

Para $N_L = 4,5$ m, notamos aumentos nos valores da altura da lâmina d'água conforme o tempo avança para todas as seções. Se comparados com os valores obtidos para $N_L = 2,5$ m, há crescimento nesses valores. Este fato é fisicamente explicado pelo fato de que quanto maior o nível do lençol, maior é a diferença de altura entre o nível do lençol e a lâmina d'água, o que acarreta maiores valores de contribuição lateral. Para a velocidade, entretanto, ocorre diminuição ao longo do tempo, ao contrário do que ocorre no caso anterior.

3.2 Soluções obtidas para Porosidade $p = 0,30$

- $N_L = 2,5$ m

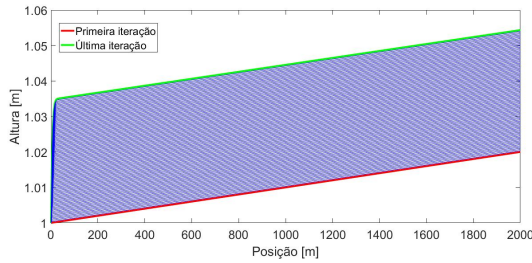


Figura 10: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.

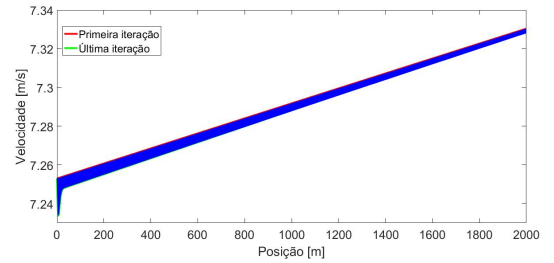


Figura 11: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.

Observamos, neste caso, aumento na altura da lâmina d'água e diminuição da velocidade de escoamento, ao longo do tempo. A diminuição da velocidade se mostra mais acentuada nas seções iniciais do canal.

- $N_L = 4,5$ m

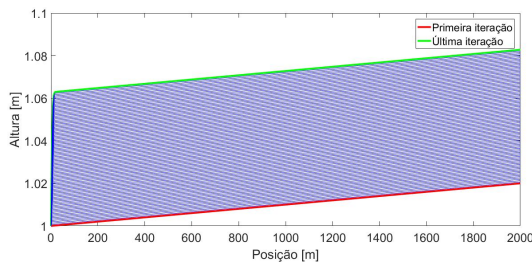


Figura 12: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.

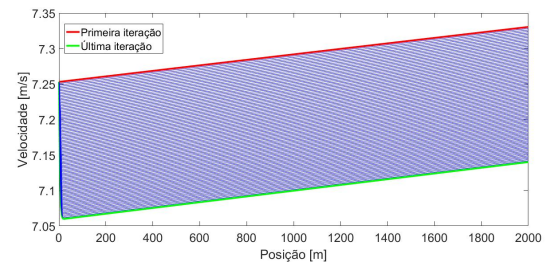


Figura 13: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.

Novamente podemos notar aumentos na altura da lâmina d'água, ao passo que a velocidade de escoamento diminui conforme o tempo passa, assim como na situação em que $N_L = 2,5$ m. Há, ainda, incrementos nos valores obtidos para altura da lâmina d'água nas seções, se comparado com o caso anterior. Já a velocidade diminui nas seções, quando comparada com a situação em que $N_L = 2,5$ m. Assim como em todos os casos anteriores, há aumento na altura e na velocidade ao longo do eixo do canal.

Um ponto importante a ser destacado após a análise dos resultados é que, conforme aumenta o nível do lençol freático, observa-se uma diminuição da velocidade nas seções ao longo do tempo. Essa diminuição pode ser observada para o caso em que $N_L = 4,5$ m com porosidade $p = 0,20$ e para os casos em que $N_L = 2,5$ m e $N_L = 4,5$ m com porosidade

$p = 0,30$. Esse fato está de acordo com o comportamento físico esperado do sistema: quanto maior o nível do lençol freático, maior a diferença de altura entre o lençol e a lâmina d'água (que começa com 1 metro de espessura). Com isso, a contribuição lateral é maior, o que acarreta um acréscimo no volume de água se deslocando. A tendência, neste caso, é que a velocidade do escoamento diminua.

4 Conclusões e Trabalhos Futuros

Podemos observar que, de modo geral, conforme aumentam a porosidade e a diferença de altura, aumentam os valores encontrados para a altura da lâmina d'água. Por outro lado, aumentos na porosidade e diferença de altura provocam uma diminuição nos valores da velocidade de escoamento. Além disso, quanto mais avançamos ao longo do eixo do rio, maiores são os valores de altura da lâmina d'água e da velocidade nas seções.

A utilização de um SBRF na obtenção da solução das equações de Saint Venant permite considerar as incertezas existentes no processo de escoamento de rios, além de permitir o cálculo das soluções de forma prática a partir dos valores de entrada de porosidade e nível do lençol freático. Caso desejemos observar a influência de mais parâmetros no escoamento, podemos construir novos SBRF e obter as soluções a partir dos dados de entrada.

Em trabalhos futuros, podemos analisar a influência da inclinação do leito S_0 na solução das equações, verificando o comportamento da altura da lâmina d'água e da velocidade do escoamento caso a inclinação varie ao longo do canal, além de estudar outros perfis transversais de rios.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES pelo auxílio financeiro que possibilitou este trabalho e ao grupo de pesquisa em Matemática Aplicada da Universidade Federal de Uberlândia pelas discussões e contribuições valiosas.

Referências

- [1] L. C. Barros, R. C. Bassanezi. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. IMECC/Unicamp, Campinas, 2015.
- [2] R. W. Fox, P. H. Pritchard, and A. T. McDonald. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 2010.
- [3] E. P. Oliveira. Estudo da incerteza do escoamento de rios através das Equações de Saint Venant, Dissertação de Mestrado, UFU, 2017.
- [4] G. C. Sander, C. W. Rose, W. L. Hogarth, J. -Y. Parlange, and I. G. Lisle. Mathematical Soil Erosion Modeling. *Water Interactions with Energy, Environment, Food and Agriculture*, 2:318-368, 2009.