Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Soluções Envoltórias para EDPs com Dois Conjuntos Disjuntos de Variáveis

Maria Lewtchuk Espindola,
Depto de Matemática, DM/CCEN, UFPB,
58051-970, João Pessoa, PB
E-mail: mariia@mat.ufpb.br.

28/09/2013

Resumo: Soluções envoltórias no caso das EDPs, hipersuperfícies que envolvem uma das famílias de hipersuperfícies dadas pelas soluções completas, tem inúmeras aplicações. O intuito deste artigo é desenvolver e discutir a existência de soluções envoltórias de EDPs que envolvem dois conjuntos disjuntos de variáveis, como é o caso das variáveis canônicas do espaço de fase na Mecânica Analítica Hamiltoniana.

Palavras-chave: *Soluções envoltórias, Mecânica Analítica Hamiltoniana, Procedimento de Hamiltonização alternativa, Espaço de fase, Matemática aplicada.*

1 Introdução

O papel desempenhado pelas soluções envoltórias em EDOs e EDPs é muito importante, principalmente em matemática aplicada. No caso das EDPs as soluções envoltórias são as hipersuperfícies que envolvem uma das famílias de hipersuperfícies dadas pelas soluções completas. O intuito desse artigo é desenvolver e discutir as soluções envoltórias de EDPs que envolvem dois conjuntos disjuntos de variáveis. Esse tipo de EDPs aparecem na Mecânica Hamiltoniana, desde que o espaço de fase é composto por dois conjuntos disjuntos de variáveis canônicas: as coordenadas e os momenta generalizados, veja, por exemplo, Leech ou Goldstein [4]. No procedimento de Hamiltonização alternativa mostramos que o Hamiltoniano é definido por uma EDP e que a função Hamiltoniana clássica é a solução envoltória da solução linear nos momenta [2]. Como a técnica de determinação das envoltórias foi utilizada sem demonstração no procedimento de Hamiltonização a intenção desse artigo é fundamentar o que foi utilizado estendendo o procedimento de determinação das soluções envoltórias para o caso do espaço de fase e demonstrando que em determinados casos essa solução não existe.

2 Soluções Envoltórias para Funções que Dependem de Dois Conjuntos Disjuntos de Variáveis

Como temos interesse na aplicação de soluções envoltórias na Mecânica Hamiltoniana e o espaço de fase é composto por dois conjuntos de variáveis, vamos considerar esses conjuntos de variáveis como $x = x_1, ..., x_n$ e $y = y_1, ..., y_n$ e a função $u = u(x, y)$. A EDP fica dada por

$$u(x, y) = f(p, q, x, y), \tag{1}$$

onde $p = p_1, ..., p_n$, $p = \partial u/\partial x$ e $q = q_1, ..., q_n$, $q = \partial u/\partial y$. Escrevendo as soluções gerais como

$$\varphi(u, x, y) = 0, \tag{2}$$

obtemos uma família de soluções completas como

$$\varphi(u, x, y, a, b) = 0, \tag{3}$$

onde $a = a_1, ..., a_n$ e $b = b_1, ..., b_n$ são constantes. Impondo as condições de envoltória [5], obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = 0, \tag{4}$$

Então a solução do sistema de equações (3) e (4) determina a solução envoltória.

Vamos supor que podemos explicitar a solução geral

$$u(x,y) = \phi(x,y), \tag{5}$$

logo desta temos a solução completa

$$u(x,y) = \phi(x,y,a,b). \tag{6}$$

As condições de envoltória equações (4) são

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial b_i} = 0. \tag{7}$$

Sendo que este sistema de $2n$ equações determina a e b e portanto a solução envoltória de (6).

Se, por outro lado, a equação (1) for linear em p (ou q) e não depender q (ou de p) então esta equação não possui solução envoltória. Por exemplo, considere a EDP

$$u(x,y) = (y_i - r_i(x))\, q_i + s(x), \tag{8}$$

[1]cuja solução geral, se $y_i \neq r_i$, será

$$u = s + \psi_i\,(y_i - r_i), \tag{9}$$

onde $\psi_i = \psi_i(c)$ e $c = c_1, ..., c_n$.

Considerando agora a solução completa equivalente a (3)

$$\varphi = s + a_i(y_i - r_i) - u = 0, \tag{10}$$

onde a_i são constantes arbitrárias, a imposição da condições de envoltória - equação (7), resulta em $y_i - r_i = 0$, contrariando a hipótese anterior. Portanto no caso especificado a equação diferencial parcial não possui envoltória.

3 Soluções envoltórias no procedimento de Hamiltonização alternativa

3.1 Hamiltonização

Definimos *Hamiltonização*, para sistemas mecânicos com N graus de liberdade descritos por uma função Lagrangiana, como o procedimento dado pelos seguintes passos:

[1]Índices repetidos implicam em soma.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0048

i. Existe uma função chamada de Lagrangiano do sistema $L(q, \dot{q}, t)$ que descreve este através das equações de Euler-Lagrange, i.e.,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{11}$$

ii. É possível definir um novo conjunto de variáveis independentes p_i (denominadas de momenta do sistema) e uma variável dependente $H(p, q, t)$ chamada de Hamiltoniano do sistema, tal que exista a seguinte relação entre as novas variáveis e as anteriores

$$H(p, q, t) \equiv p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \tag{12}$$

iii. O movimento do sistema mecânico pode ser descrito pelas equações (11), ou de forma alternativa, pelo conjunto de equações canônicas de movimento, conhecidas como equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \tag{13}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{14}$$

A equivalência entre as descrições Lagrangiana (i) e Hamiltoniana, definida pelos passos (ii) e (iii), é obtida sempre que:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial H/\partial p_i)}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{15}$$

onde o Lagrangiano é considerado como função de q_k, $\partial H/\partial p_k$ e t. [4]

3.2 Procedimento De Hamiltonização Alternativa

O procedimento de Hamiltonização consiste na substituição do primeiro conjunto de equações de Hamilton - (13), na definição da função Hamiltoniana - (12) resultando em

$$H = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - L\left(q, \frac{\partial H}{\partial p}, t\right), \tag{16}$$

que passa a ser a equação diferencial parcial que define a função Hamiltoniana. Portanto, qualquer solução desta equação será uma descrição canônica do sistema mecânico.

Esta equação diferencial parcial possui uma solução generalizada linear nos momenta dada por

$$H = p_i A_i - L(q, A, t), \tag{17}$$

onde os $A_i{}'s$ são funções arbitrárias de q_k e t, que serão determinadas a partir do primeiro conjunto de equações de Hamilton (13) e pelas relações de equivalência entre as descrições Hamiltoniana e Lagrangiana (15)..

Por outro lado, se o Lagrangiano não é singular, então a equação (16) possui também uma solução envoltória (singular), que é obtida através das seguintes condições:

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = 0. \tag{18}$$

Estas condições de envoltória determinam as funções arbitrárias A_i.

Portanto, podemos concluir que se L é uma função Lagrangiana não singular (regular) teremos duas maneiras alternativas de Hamiltonizar o sistema mecânico: (a) o Hamiltoniano é uma solução particular obtida de (17); (b) o Hamiltoniano é a solução envoltória de (16).

É importante ressaltar que, em todo o procedimento desenvolvido, não foi utilizada a definição usual dos momenta $(p = \partial L/\partial \dot{q})$. Efetivamente os momenta passam a ser definidos pelo segundo conjunto de equações de movimento de Hamilton - (14).

Se escolhemos a alternativa (a) para Hamiltonizar o sistema os momenta obtidos a partir das equações (14) diferem daqueles obtidos a partir da definição usual. Enquanto que, se a escolha for a alternativa (b) para a Hamiltonização do sistema, então podemos demonstrar que as equações (14) conduzem as definições usuais dos momenta e portanto a hamiltonização usual.

A partir de (18) e (17) temos

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial A_i} = 0. \tag{19}$$

Substituindo (20) em (19) e utilizando as equações de Euler-Lagrange - (11), obtemos

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \tag{20}$$

as quais reproduzem as definições usuais dos momenta.

A conclusão é que este procedimento de Hamiltonização contém o usual sempre que este existe e define uma nova Hamiltonização em qualquer caso, inclusive naqueles em que o procedimento usual não nos fornece quaisquer resultados. [2]

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0048

4 Conclusão Final

A demonstração da inexistência em determinados casos da solução envoltória é o que fundamenta a necessidade de uma abordagem que difere da de Hamilton para os sistemas singulares como, por exemplo, a desenvolvida por Dirac [1] e por Espindola [2]. Este artigo poderia ser generalizado estendendo a um número n de conjuntos disjuntos de variáveis. Assim como para o caso continuo envolvendo portanto EDPs variacionais. No procedimento de Hamiltonização alternativa que desenvolvemos para teorias de campo utilizamos esses conceitos [3].

Referências

[1] Dirac, P. A. M., Generalized Hamiltonian Dynamics, Can. J. Math., vol. 2, pp. 129-148, 1950.

[2] Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Hamiltonization as a Two Fold Procedure, Hadronic J., vol. 28, pp. 807-810, 1986; Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. Hamiltonization for Singular and Non Singular Mechanics, J. Math. Phys., vol. 9, pp. 121-124, 1986; Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Direct Hamiltonization, Hadronic J. Suppl., vol. 4, pp. 369-373, 1996; Espindola, M. L. - Hamiltonizações Alternativas, Tese de Doutorado, DF UFRJ, 1993; Espindola, M, L., Direct Hamiltonization - Generalization Of An Alternative Hamiltonization, Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 22, pp. 1250135 [5 pages], DOI No: 10.1142/S0218127412501350, (2012).

[3] Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Two Fold Hamiltonization for Field Theory, Hadronic J., vol. 10, pp. 83-87, 1987.

[4] Leech, J. W., "Mecânica Analítica", Ao Livro Técnico, EDUSP, RJ, 1971; Goldstein, H., "Classical Mechanics", Addison Wesley, 1971.

[5] Sneddon, I., Elements of Partial Differential Equations, MCGRAW-HILL, Kogakusha, First edition, 1957.

