Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Existência e Unicidade de Solução para um sistema de Equações de Maxwell aplicado a um condutor perfeito

Marcos T. Alves,
PPGMA, UFPR
81531-980, Curitiba, PR
E-mail: mtmarcos@gmail.com,

Marcio V. Ferreira
UFSM - Departamento de Matemática
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: v.f.marcio@gmail.com.

Resumo: *Investigaremos questões relacionadas a existência e unicidade de solução para um sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito. Esse estudo será baseado na caracterização dos espaços funcionais de origem eletromagnética e na aplicação da teoria de semigrupos de operadores lineares.*

Palavras-chave: *Espaços Funcionais em Eletromagnetismo. Operador de Maxwell. Equações de Maxwell. Semigrupos de operadores lineares.*

Em 1873, James Clerk Maxwell (físico e matemático britânico) fundou a teoria moderna do eletromagnetismo com a publicação de sua obra *Treatise on Eletricity and Magnetism*, reunindo um conjunto de equações que atualmente levam seu nome.

Estas equações são o suporte matemático para os fenômenos eletromagnéticos, estabelecendo equações diferenciais que relacionam os campos elétrico e magnético e suas respectivas induções. Representaremos por E, H, D e B, os campos elétrico, magnético e as induções elétrica e magnética, respectivamente. Nas aplicações tratadas neste trabalho, consideramos os campos que variam no tempo. Desse modo,

$$E = E(x,t),\ H = H(x,t),\ D = D(x,t) \text{ e } B = B(x,t)$$

são funções vetoriais que dependem da posição espacial $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Os campos apresentados anteriormente são gerados por dois tipos de fontes: *cargas elétricas estáticas* e fluxos de cargas elétricas variáveis chamadas *correntes*. A distribuição de cargas é dada por uma função escalar ρ que representa a densidade de carga elétrica, enquanto que as correntes são descritas por uma função vetorial de densidade de corrente J.

A relação existente entre os campos E, H, D e B e as fontes ρ e J é sintetizada por um conjunto de equações que, em geral, são aplicadas a uma região do espaço $\mathbb{R}^3$ ocupada por um campo eletromagnético. Estas equações, denominadas *equações de Maxwell*, em sua forma diferencial são as seguintes:

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \nabla \times H = -J, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot D = \rho, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot B = 0. \tag{4}$$

Descrevemos agora cada uma das equações listadas acima.

A equação (1) é conhecida como *Lei de Ampère-Maxwell.* Esta lei coincide com a Lei de Ampère salvo pela adição do termo $\dfrac{\partial D}{\partial t}$ introduzido por Maxwell.

A equação (2) é chamada *Lei de Faraday.* Ela fornece o efeito da variação da indução magnética no campo elétrico.

A equação (3), conhecida como *Lei de Gauss*, estabelece que o fluxo de indução elétrica através de uma superfície fechada é dado pela carga líquida dentro da superfície, o que significa que as linhas de cargas elétricas começam e terminam com cargas elétricas.

A *Lei de Gauss para o magnetismo* aparece na equação (4) e afirma que o fluxo da indução magnética ao longo de qualquer superfície fechada é nulo.

A partir das equações (1) e (3), relacionamos as densidades ρ e J através da equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

conhecida como *equação da conservação da eletricidade.*

Dada a complexidade do sistema (1)-(4), juntaremos a estas leis universais certas leis constitutivas que incorporam, de forma suficientemente simples, interações eventualmente complexas e que traduzam características particulares dos materiais sem comprometer, dentro de determinados limites, a adequação entre o modelo e a realidade física.

Uma das leis constitutivas aqui consideradas é a *Lei de Ohm*, que destaca uma relação de proporcionalidade entre o campo elétrico E e a densidade de corrente J, ou seja,

$$J = \sigma E, \tag{5}$$

onde σ representa a condutividade do material. Além dessa, dado nosso interesse por modelos de Maxwell aplicados em condutores perfeitos [1], tomamos as *leis de magnetização e polarização* do meio da forma

$$D = \varepsilon E \text{ e } B = \mu H, \tag{6}$$

em que ε representa a capacidade indutiva e μ representa a permeabilidade magnética do meio.

De posse das equações (5) e (6) e considerando $J = 0$, $\rho = 0$ (campo eletromagnético no vácuo com ausência de cargas), reescrevemos o sistema (1)-(4) como segue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} - \nabla \times H &= 0,\\
\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} + \nabla \times E &= 0,\\
\nabla \cdot (\varepsilon E) &= 0,\\
\nabla \cdot (\mu H) &= 0.
\end{aligned}$$

Neste trabalho, adotaremos $\varepsilon = \mu = 1$. Desse modo, abordaremos o seguinte *sistema de equações de Maxwell*

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \tag{8}$$

$$\nabla \cdot E = 0, \tag{9}$$

$$\nabla \cdot H = 0. \tag{10}$$

No instante $t = 0$, iremos supor que o campo elétrico $E(x, 0) = E_0(x)$ e o campo magnético $H(x, 0) = H_0(x)$ sejam conhecidos e satisfaçam as relações:

$$\nabla \cdot E_0 = 0 \text{ e } \nabla \cdot H_0 = 0. \tag{11}$$

[1] Um condutor perfeito é um meio fictício tal que $\sigma \to +\infty$. No interior de um condutor perfeito, o campo é nulo. Metais são materiais que aproximam-se deste conceito.

Acrescentamos às condições iniciais, as condições de fronteira do meio em estudo. Para esse propósito, seja Ω uma região do espaço $\mathbb{R}^3$ representando um condutor perfeito e Γ sua fronteira. Fisicamente, diante dessas condições, faz sentido considerarmos as seguintes condições de fronteira

$$E \times \eta|_\Gamma = 0 \text{ e } H \cdot \eta|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

em que $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))$ denota o vetor normal unitário a $x \in \Gamma$ exterior a Ω.

Sob essas hipóteses, um de nossos objetivos nessa apresentação será discutir questões relacionadas a existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell (7)-(10) sujeito às condições iniciais em (11) e às condições de fronteira em (12).

Os trabalhos assentes neste modelo linear usam um conjunto de técnicas que passam pela formulação fraca das equações a resolver, permitindo encontrar soluções com menor regularidade do que aquela que é exigível a soluções das equações dos modelos encontrados, referido vulgarmente por formulação forte do problema.

Observamos que nos problemas de eletromagnetismo intervêm essencialmente os operadores diferenciais vetoriais de primeira ordem: divergente e rotacional. Assim, torna-se natural adotarmos os espaços das funções de $[L^2(\Omega)]^3$ cujo divergente ou rotacional são funções de $L^2(\Omega)$ e $[L^2(\Omega)]^3$, respectivamente, como quadro funcional para o estudo desses fenômenos. Estes espaços são designados por $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$.

Com este espírito, o foco deste trabalho consiste na caracterização destes espaços e em suas aplicações em modelos eletromagnéticos específicos. Dessa forma, elaboramos o roteiro que passamos a descrever.

Inicialmente, visando um tratamento matemático para os problemas de origem eletromagnética considerados, trataremos dos espaços $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$ do ponto de vista de suas propriedades topológicas. Enaltecemos neste momento a caracterização dos traços das funções de $H(div, \Omega)$ e $H(rot, \Omega)$; passo fundamental para dispormos de uma fórmula de integração por partes. Em seguida, definiremos os subespaços $H(div\ 0, \Omega)$ e $H_0(div\ 0, \Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$. Estudaremos propriedades de densidade nestes espaços essenciais para as aplicações. Os principais resultados referentes ao estudo desses espaços funcionais são descritos abaixo:

Teorema 1 *(do Traço para $H(div, \Omega)$) Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Então*

(i) $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ *é denso em* $H(div, \Omega)$*;*

(ii) A aplicação traço, $\gamma_\eta : v \mapsto v \cdot \eta|_\Gamma$ *definida em* $[D(\overline{\Omega})]^3$*, estende-se por continuidade a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, ainda denotada por* γ_η*, de* $H(div, \Omega)$ *sobre* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *(aqui* $\eta(x)$ *denota a normal exterior unitária em* $x \in \Gamma$*);*

(iii) É válida a seguinte igualdade:

$$\int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi\, dx + \int_\Omega v \cdot (\nabla \varphi)\, dx = < \gamma_\eta(v), \varphi >_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)},\ \forall\, v \in H(div, \Omega),\ \varphi \in H^1(\Omega),$$

conhecida como "fórmula generalizada de Green" para o espaço $H(div, \Omega)$*;*

(iv) O núcleo $ker(\gamma_\eta)$ *da aplicação* γ_η *é o espaço* $H_0(div, \Omega)$*.*

O próximo fato ilustra uma condição suficiente para que funções de $H(rot, \Omega)$ pertençam ao espaço $H_0(rot, \Omega)$.

Teorema 2 *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Se tivermos $u \in H(rot, \Omega)$ tal que*

$$(u, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times u, \varphi) = 0,\ \forall\, \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3, \tag{13}$$

então $u \in H_0(rot, \Omega)$.

Com auxílio do teorema anterior, caracterizamos o traço de funções de $H(rot,\Omega)$.

Teorema 3 *(do Traço para $H(rot,\Omega)$) Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Então*

(i) $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ *é denso em* $H(rot,\Omega)$*;*

(ii) A aplicação traço, $\gamma_\tau : v \mapsto v \times \eta|_\Gamma$ *definida em* $[D(\overline{\Omega})]^3$*, estende-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por* γ_τ*, de* $H(rot,\Omega)$ *em* $[H^{-1/2}(\Gamma)]^3$ *(aqui* $\eta(x)$ *denota a normal exterior unitária em* $x \in \Gamma$*);*

(iii) Para todo $v \in H(rot,\Omega)$ *e para todo* $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$*, vale a seguinte igualdade:*

$$\int_\Omega v \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx - \int_\Omega (\nabla \times v) \cdot \varphi\ dx =< \gamma_\eta(v), \varphi >_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3,[H^{1/2}(\Gamma)]^3},$$

conhecida como "fórmula generalizada de Green" para o espaço $H(rot,\Omega)$*;*

(iv) O núcleo $ker(\gamma_\tau)$ *da aplicação* γ_τ *é o espaço* $H_0(rot,\Omega)$*.*

Via teorema de traço em $H(rot,\Omega)$, obtemos a seguinte "fórmula de integração":

$$\int_\Omega w \cdot (\nabla \times v)\ dx = \int_\Omega (\nabla \times w) \cdot v\ dx, \text{ para todos } w \in H_0(rot,\Omega) \text{ e } v \in H(rot,\Omega). \tag{14}$$

O desfecho deste tratamento matemático para a teoria do Eletromagnetismo ocorre com algumas aplicações dos espaços funcionais abordados anteriormente. Como primeira aplicação, estudamos o sistema de equações de Maxwell com uma condição de fronteira dada por $\eta \times E = 0$. Para este fim, definiremos o operador de Maxwell $\mathcal{A}$ e caracterizaremos o operador $\mathcal{A}^*$ (adjunto de $\mathcal{A}$). Em nossa última aplicação, restringiremos este operador ao subespaço

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{(E,H) \in X;\ \nabla \cdot E = 0,\ \nabla \cdot H = 0,\ \eta \cdot H|_\Gamma = 0\} \\ &= H(div\ 0,\Omega) \times H_0(div\ 0,\Omega),\end{aligned}$$

obtendo assim o operador $\mathcal{A}_\mathcal{H}$. Com auxílio da teoria de semigrupo de operadores lineares, encerraremos a apresentação provando o seguinte teorema de existência e unicidade de solução para um sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito:

Teorema 4 *Dado* $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H})$*, existe uma única solução*

$$E, H \in \mathcal{C}([0,+\infty), D(\mathcal{A}_\mathcal{H})) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty), \mathcal{H})$$

do problema $(7)-(12)$*.*

Referências

[1] Alves, M. T. Espaços Funcionais e Operadores Lineares em Eletromagnetismo. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2012.

[2] Dautray, R.; Lions, J. L. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Spectral Theory and Applications. Berlin: Spring-Verlag, 1990, v. 3.

[3] Ferreira, M. V.; Perla Menzala, G. Uniform Stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domain, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 18, n. 4, p. 719-746, 2007.

[4] Ferreira, M. V. Ondas Elásticas e Electromagnéticas em Domínios Exteriores: Propriedades Assintóticas. 2005. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

[5] Girault, V.; Raviart, P. A., Finit Element Methods for Navier-Stokes Equations. Berlin: Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[6] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M. Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2000.

[7] Monk, P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. New York: Oxford University Press, 2003.

[8] Nicaise, S. Exact Boundary Controllability of Maxwell's Equations in Heterogeneous Media and an Application to an Inverse Source Problem. SIAM Journal on Control Optimization, v. 38, n. 4, p. 1145-1170, 2000.

[9] Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.

[10] Phung, K. D. Contrôle et Stabilisation D'Ondes Électromagnétiques. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, v. 5, p. 87-137, 2000.

[11] Yin, H. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect. SIAM Journal on Mathematical Analysis, v. 29, n. 3, p. 637-651, 1998.

