Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo do Efeito da Variação no Passo Sobre o Erro no Método de Runge-Kutta

Anderson Wallace Paiva do Nascimento[1]
Ivan Mezzomo[2]
Matheus da Silva Menezes[3]
Pedro Thiago Vilela de Mendonça[4]
Caroline Galvão Toscano[5]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

1 Resumo

Os métodos de Runge-Kutta (RK) compreendem uma classe de métodos numéricos para resolução de problemas de valor inicial e apresentam-se como aprimoramentos dos métodos de série de Taylor, visto que contornam seu maior problema, isto é, o cálculo de derivadas de ordens altas. Essencialmente, todos os métodos RK são generalizações da fórmula básica de Euler, e são caracterizados por sua respectiva equação de incremento dada por $y_{n+1} = y_n + \phi h$, em que ϕ é função de x, y e h, definida por:

$$\phi(x_i, y_i, h) = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i \tag{1}$$

onde n é a ordem do método, os $a_i' s$ são constantes, que de modo geral satisfazem a propriedade: $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Por fim, os termos $k_i' s$ são o resultado da função f num dado ponto (x, y) de cada subintervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

Uma das principais desvantagens dos métodos RK, no entanto, é a escassez de modos simples de se estimar o erro cometido, o que inclusive poderia nortear a escolha do passo. Nesse contexto, o presente trabalho visa fazer um estudo da variação do erro no método RK de quarta ordem em função da respectiva variação no passo.

Em [2], foi utilizada a sequência recursiva convencional do referido método. Tal sequência é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2}$$

[1]anderson.wallace@live.com
[2]imezzomo@ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]pvthiago@hotmail.com
[5]caroltoscano.cn@hotmail.com

onde $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$, $k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$ e $k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$.

Para a realização do referido estudo, foi escolhido um problema clássico e recorrente da análise estrutural que é o cálculo de deflexão em vigas bi-apoiadas com carregamento triangular. Este problema conta com solução exata conhecida, o que permite a estimativa do erro. Tal fenômeno é regido por um problema de valor inicial que pode ser formulado como segue:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{w_0 x^4}{12L} + \frac{w_0 L x^2}{8} - \frac{5 w_0 L^3}{192}\right);\ y(0) = 0 \tag{3}$$

onde w_0 é o carregamento externo, L é o comprimento da viga e EI rigidez a flexão da viga analisada. Foram realizados incrementos no passo de 0,1 a 0,01 e a cada etapa foi adotado o erro máximo para o referido passo e implementada no software Scilab. Os resultados obtidos, para $w_0 = 10\ KN$, $E = 210\ GPa$ e $I = 113 \times 10^6\ mm^4$ e $L = 3\ m$, são apresentados a seguir:

Tabela 1: Resultados dos experimentos realizados

Passo	Erro Máximo	Variação do Erro	Percentual do erro
0,1	5,14403E-06	-	-
0,09	3,24649E-06	1,89754E-06	0,00211%
0,08	2,02677E-06	1,21972E-06	0,00152%
0,07	1,21099E-06	8,15782E-07	0,00117%
0,06	6,66667E-07	5,44319E-07	0,00091%
0,05	3,21502E-07	3,45165E-07	0,00069%
0,04	1,2996E-07	1,91542E-07	0,00048%
0,03	4,1667E-08	8,8293E-08	0,00029%
0,02	8,23E-09	3,3437E-08	0,00017%
0,01	5,14E-10	7,716E-09	0,00008%

Os resultados mostram claramente que a relação entre o passo e o valor máximo do erro para RK de quarta ordem no problema em questão é regida por uma função potência que se ajusta muito bem aos dados tabelados, sendo útil em estimativas posteriores do erro em função do passo.

Referências

[1] R. L. Burden, D. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica.* 3. ed., Cengage Learning, São Paulo, 2015.

[2] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. *Calculo Numérico, aspectos teoricos e computacionais.* 2. ed., Pearson, São Paulo, 1997.

[3] R. C. Hibbeler. *Resistência dos Materiais.* 7 ed., Pearson, CIDADE, 2009.