Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre o Método das Raízes Múltiplas e Método de Bairstow

Ronaldo Lopes [1]
Ivan Mezzomo[2]
Matheus da Silva Menezes[3]
Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN
Fernando H. N. Amaral[4]
Departamento de Matemática - UERN

1 Resumo

Na literatura encontramos vários métodos numéricos para encontrar as raízes de funções, em que cada método possui suas vantagens e limitações para determinados tipos de funções. Uma característica dos métodos de Bairstow e das raízes múltiplas é que são capazes de encontrar raízes com multiplicidade, isto é, raízes que são pontos críticos da função. Ambos os métodos são derivados do método de Newton. De acordo com o exposto acima, o objetivo desse trabalho é fazer um estudo comparativo entre os métodos de Bairstow e das raízes múltiplas.

De acordo com [1], o método de Bairstow utiliza da divisão polinomial para fazer o cálculo das raízes. Dado um polinômio de grau n, $f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, se dividirmos a função por um fator $x^2 - rx - s$, temos o seguinte polinômio de grau $n-2$ dado por

$$f_{n-2} = b_2 + b_3x + \ldots + b_{n-1}x^{n-3} + b_nx^{n-2} \tag{1}$$

onde $b_n = a_n$, $b_{n-1} = a_{n-1} + rb_n$, $b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2}$, para $i = 0, \ldots, n-2$, e resto $R = b_1(x-r) + b_0$. Portanto, este método se reduz a determinar valores de r e s que tornem o fator quadrático um divisor exato.

Segundo [1], o método das raízes múltiplas foi desenvolvido na tentativa de otimizar o método tradicional de Newton, criando uma nova função $u(x)$, tal que

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2}$$

[1]ronaldolg26@gmail.com
[2]imezzomo@ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]fernandofhna@hotmail.com

que possui as mesmas raízes de $f(x)$. Substituindo a função $u(x)$ no método de Newton, temos a seguinte função de iteração

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{f'(x_i)^2 - f"(x_i)f(x_i)} \tag{3}$$

Para fazer o estudo comparativo, foram usados polinômios de terceiro grau e implementados no software Dev C++ na linguagem C. Como critério de parada usaremos o erro relativo $E_r = \frac{x-\bar{x}}{\bar{x}}$, onde $\bar{x}$ é a raiz calculada [2], com precisão de $\varepsilon = 10^{-5}$. As funções analisadas possuem as seguintes características: Função 1: $f(x) = x^3 - 7x^2 - 49x + 343$, possui raízes -7 e 7 (com multiplicidade 2); Função 2: $f(x) = x^3 + 7x^2 - 104x + 240$, possui raízes -15 e 4 (com multiplicidade 2); Função 3: $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$, possui raízes -3 (com multiplicidade 2) e 1; Função 4: $f(x) = x^3 - 8.5x^2 - 6x + 13.5$, possui raízes -1.5, 0 e 9; Função 5: $f(x) = x^3 - 31x^2 + 311x - 1001$, possui raízes 7, 11 e 13; Função 6: $f(x) = x^3 + 1.9x^2 - 8.2x + 0.8$, possui raízes -4, 0.1 e 2.

Tabela 1: Resultados dos experimentos realizados

	Iter. MB	$\bar{x}$ MB	E_r MB	Iter. MRM	$\bar{x}$ MRM	E_r MRM
Função 1	12	7.00118	0	5	6.99999	1.42×10^{-6}
Função 2	5	4.00000	0	4	3.99999	2.269×10^{-7}
Função 3	14	-2,99952	9.05×10^{-6}	5	-2.99999	3.33×10^{-6}
Função 4	4	-1.50000	4.21×10^{-6}	17	-1.49999	6.66×10^{-6}
Função 5	8	11.00001	1.13×10^{-7}	8	11.00000	0
Função 6	5	0.10000	6.92×10^{-10}	7	0.09999	1×10^{-4}

Como base na tabela acima, é possível notar que as funções 1, 2 e 3, o método das raízes múltiplas foi mais eficiente em relação ao número de iterações, uma vez que este método tende ser eficiente em funções em que as raízes possuem multiplicidade. Porém o método de Bairstow teve menor erro relativo nas funções 1 e 2. Nas funções 4, 5 e 6, que são função que não possuem multiplicidade nas raízes, o método de Bairstow foi mais eficiente tanto em relação ao número de iterações e quanto ao erro relativo nas funções 4 e 6. Na função 5, ambos os métodos convergiram com o mesmo número de iterações e o método das raízes múltiplas foi mais preciso. A partir desses resultados vimos que ambos os métodos, ainda que com características distintas, convergiram para as raízes das funções. Cabe ressaltar que o método de Bairstow encontra um polinômio de segundo grau que divide a função polinomial, e dessa forma, pode ser utilizado para encontrar raízes complexas.

Referências

[1] S. C. Chapra and R. P. Canale. *Metodos Numéricos para Engenharia.* 5. ed., Bookman, São Paulo, 2011.

[2] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. *Calculo Numérico, aspectos teóricos e computacionais.* 2. ed., Pearson, São Paulo, 1997.

