

## Dispersão de dióxido de carbono em área de transição floresta-cerrado

Geraldo L. Diniz,

Depto de Matemática, ICET, UFMT,  
78.060-900, Cuiabá, MT.

E-mail: geraldo@ufmt.br,

Valdirene Vilani

Programa de Pós-graduação em Física Ambiental

78.060-900, Cuiabá, MT

E-mail: valdirenevilani@hotmail.com.

**Resumo:** Neste trabalho é apresentado um problema de dispersão de dióxido de carbono no meio aéreo. Para tanto, é proposto um modelo matemático que descreve a dispersão do dióxido de carbono sobre uma floresta de transição Amazônia-Cerrado, utilizando um domínio bidimensional. São verificadas a existência e unicidade da solução do problema na sua formulação variacional. Em seguida, são aplicados métodos numéricos de aproximação da solução variacional. A discretização espacial, foi feita pelo método dos elementos finitos (MEF, via Galerkin) e a discretização temporal pelo método implícito de Crank-Nicolson. Os resultados apresentados ilustram a capacidade qualitativa do modelo e sua funcionalidade computacional.

**Palavras chave:** Modelagem matemática, contaminação atmosférica, método dos elementos finitos (MEF).

### 1 Introdução

O dióxido de carbono é o gás do efeito estufa mais estudado porque o volume de suas emissões para a atmosfera representa algo em torno de 55% do total das emissões de gases causadores do efeito estufa, principalmente, decorrendo da queima de combustíveis fósseis e do tempo de sua permanência na atmosfera [6].

Pesquisadores utilizam a correlação de vórtices turbulentos para medir as trocas gasosas entre floresta e atmosfera, que corresponde à circulação vertical dos ventos dentro e acima da floresta, considerando-a como topograficamente homogênea [6, 12, 15]. Entretanto, pesquisas recentes [4] mostram que as torres de monitoramento não são capazes de capturar os fluxos horizontais, uma vez que tais torres medem a variabilidade das concentrações de  $\text{CO}_2$  apenas na direção vertical.

A poluição do ar é influenciada pelas características físicas e termodinâmicas dos poluentes emitidos, pelas condições de dispersão atmosférica e características topográficas e provocada, principalmente, por três tipos de emissões:

- a) Gases resultantes da combustão nos motores de veículos automotores, que contêm óxidos de nitrogênio, monóxido e dióxido de carbono, dióxido de enxofre, derivados de hidrocarbonetos, responsáveis por 40% da poluição atmosférica nas grandes cidades;
- b) Gases e materiais particulados lançados pelas chaminés de indústrias químicas, siderúrgicas, fábricas de cimento, de papel, refinarias de petróleo, contendo as mais variadas espécies químicas;
- c) Queimadas e incineração de lixo doméstico e industrial, responsáveis pela emissão de fumaça contendo misturas de gases com as mais variadas composições químicas [5, 10].

O Brasil contribui com mais de 90% da produção mundial de madeira, sendo esta proveniente da Amazônia. Nesta região, 76 pólos madeireiros são responsáveis por mais de 95% de toda a madeira extraída em toda a Amazônia brasileira, sendo que 80% da extração e processamento

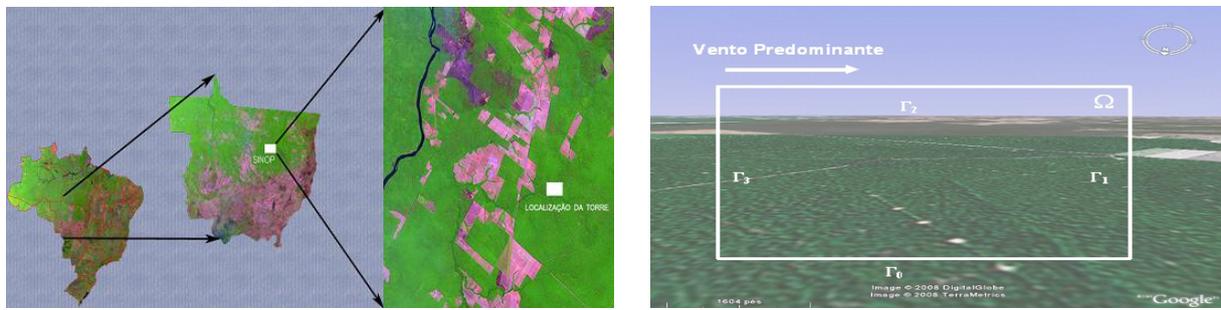
ocorrem dentro do “Arco de Desmatamento” no sul da bacia Amazônica, indo de Rondônia ao norte do Mato Grosso e ao sul e leste do Pará [13].

Já o cerrado é um dos cinco maiores tipos de vegetação do Brasil e cobre cerca de 2 milhões de km<sup>2</sup> do território, aproximadamente 23% do território nacional, localizados no Brasil Central, principalmente nos estados de Minas Gerais, Mato Grosso e Goiás [12].

A zona de transição entre o bioma Amazônico e o bioma Cerrado, cobre cerca de 129.000 km<sup>2</sup>, representa mais de 6% da área florestal do Brasil, sendo o território matogrossense formado por 42% de floresta de transição e Cerrado [14].

## 2 Área de estudo e o modelo matemático

O local utilizado para modelar e simular o transporte e a difusão do dióxido de carbono, e análise dos possíveis impactos nos ambientes adjacentes, foi a floresta de transição Amazônia-Cerrado, situada na Fazenda Maracaí localizada a aproximadamente 50 km NE da cidade de Sinop, na região norte do Mato Grosso, apresentada na figura 1(a), onde está instalada uma torre micrometeorológica de 42 metros de altura, coordenada pelo Grupo de Pesquisa em Física Ambiental - UFMT, como parte do projeto Experimento de Grande Escala da Biosfera Atmosfera na Amazônia (LBA).



(a) Localização da área de estudo. Fonte: [3].

(b) Representação do domínio  $\Omega$ .

Figura 1: Área de estudo e representação do domínio

Descreveremos um modelo matemático para o problema a ser estudado em sua formulação clássica, caracterizado pela equação diferencial e as condições de contorno, capaz de simular o transporte e a difusão do dióxido de carbono. A escolha do domínio se deve a uma suposição inicial de simetria por translação, levando a um domínio bidimensional, conforme ilustrado na figura 1(b).

A fronteira  $\Gamma_0$  situada logo acima do topo da floresta será a fronteira de entrada do CO<sub>2</sub>, com uma extensão de 1,5 km, e denotando por  $\Gamma_2$  a altitude limite a partir da qual não há concentração de CO<sub>2</sub>, com  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_0$  distantes entre si de 1 km. Além disso,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$  serão consideradas suficientemente distantes, para uma condição assintoticamente estável, ou seja, o que sai é igual ao que entra nestas fronteiras.

Denotando por  $C(x, y, t)$  a concentração de CO<sub>2</sub> no ponto  $(x, y)$  do domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  para um instante  $t \in (0, T]$ , a equação de difusão-advecção tem sua origem nas leis de conservação das massas [1] e seu formato mais geral é dado por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(\text{fluxo}) - \text{degradação} + \text{fonte} \quad (1)$$

Em termos de modelagem clássica deste fenômeno, os termos do modelo apresentado na

equação (1) são descritos por (2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\text{fluxo}) &= \operatorname{div}(-\alpha \nabla C + \vec{V} \cdot C) \quad [2]; \\ \text{degradação} &= \sigma C \quad [1]; \\ \text{fonte} &= \mathcal{F} \quad [11]. \end{aligned} \tag{2}$$

Assim, a equação adotada para modelar o processo de dispersão efetiva do dióxido de carbono no domínio estabelecido é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\operatorname{div}[-\alpha \nabla C] - \operatorname{div}[\vec{V} \cdot C] - \sigma C + \mathcal{F} \tag{3}$$

onde  $\alpha$  será considerado  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 y$  no domínio, numa primeira aproximação, representando a difusibilidade efetiva no meio aéreo;  $\operatorname{div}[\vec{V}] = 0$  aproximando um campo “bem comportado” no sentido dos fluxos aéreos;  $\sigma C$  aproxima linearmente a degradação total no meio aéreo;  $\mathcal{F} = 0$  representa que não há fontes de  $\text{CO}_2$  no interior domínio. O ingresso de  $\text{CO}_2$  será pela fronteira  $\Gamma_0$ , de acordo com as condições de contorno a seguir.

Seja  $\eta$  o vetor normal exterior unitário ao longo da fronteira  $\Gamma$ . As condições de contorno serão consideradas do tipo mistas, numa parte ( $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ ) assintoticamente estacionárias - condições de Von Neumann [1], em  $\Gamma_2$  do tipo Dirichlet [1] e fluxo de entrada constante em  $\Gamma_0$  [11]. Daí, as condições de contorno são dadas por:

$$-\alpha \left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_i} = 0, \quad \forall t \in (0, T], i = 1 \text{ e } 3 \tag{4}$$

$$-\alpha \left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_0} = Q \quad \forall t \in (0, T], \tag{5}$$

$$C|_{\Gamma_2} = 0, \quad \forall t \in (0, T], \tag{6}$$

onde  $Q$  é a quantidade constante que entra pela fronteira  $\Gamma_0$ .

Além disso, para estabelecer o problema, será considerada a condição inicial dada por:

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y) \tag{7}$$

que descreve a distribuição inicial da concentração de dióxido de carbono em todo o domínio  $\Omega$ .

As equações (3) a (7) constituem a formulação clássica ou “forte” do problema. Em geral, as equações derivadas a partir das leis de conservação têm solução no sentido clássico, no entanto, nem sempre é viável obter a solução analítica. Neste sentido, será obtida uma aproximação da solução fraca através do método dos elementos finitos.

### 3 Formulação variacional

A introdução da derivada no sentido das distribuições, permite obter a formulação variacional ou fraca, que facilita verificar a existência e unicidade de solução do problema, assim como a aplicação do método dos elementos finitos (via método de Galerkin) para a discretização espacial, de modo a obter as aproximações numéricas adequadas da solução do problema para instante  $t \in (0, T]$ , cuja descrição é feita a seguir.

Uma justificativa para a solução fraca consiste na possibilidade de se usar funções que modelem fenômenos descontínuos. Neste sentido, deve ser obtida outra formulação do problema, dado em sua formulação clássica pelas equações (1–3), que para um sub-espço conveniente [11] de:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ v(x, y) \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\},$$

e que será denotado por  $\mathcal{V}$ , onde  $L^2$  é o espaço das funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue. Em  $\mathcal{V}$ , o produto interno é definido por:

$$(f|g) := \iint_{\Omega} fg d\mu; \quad (\vec{f} || \vec{g}) := \iint_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{g} d\mu; \quad \langle f|g \rangle := \int_{\Gamma} fg d\gamma$$

Considerando uma aproximação do coeficiente de difusão aérea ( $\alpha$ ) nas equações (2) e (5) como sendo  $\alpha(y)$  no domínio  $\Omega$ , o produto interno definido em  $\mathcal{V}$  e reagrupando no primeiro membro, se obtém:

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} \Big| v \right) - ((\alpha_0 + \alpha_1 y) \Delta C | v) + (\vec{V} \cdot \nabla C | v) + \sigma(C|v) = (\mathcal{F}|v), \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (8)$$

Ao fazer o uso da primeira identidade de Green [8] para operadores, que aplicada ao termo  $-((\alpha_0 + \alpha_1 y) \Delta C | v)$  da equação (8). Lembrando que as condições de contorno dadas nas equações (4) e (5), resulta em  $-\alpha \left\langle \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big| v \right\rangle = -\langle Q|v \rangle_{\Gamma_0}$  e considerando, ainda, que as componentes advectivas sejam definidas por:  $V_1 = (\tau_0 + \tau_1 y)$  e  $V_2$ , sendo  $V_2$  a velocidade do vento na direção predominante.

Daí, se chega a formulação variacional na forma:

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} \Big| v \right) + ((\alpha_0 + \alpha_1 y) \nabla C | \nabla v) + ((\tau_0 + \tau_1 y) \frac{\partial C}{\partial x} \Big| v) + V_2 \left( \frac{\partial C}{\partial y} \Big| v \right) + \sigma(C|v) = \langle Q|v \rangle_{\Gamma_0}, \quad (9) \\ \forall v \in \mathcal{V},$$

Considerando a formulação variacional obtida e aplicando o teorema de Lions [9], se verifica que a equação (9) atende as hipóteses do teorema e, portanto, se tem garantida a existência e unicidade da solução fraca.

## 4 Resultados

Para se ter resultados próximos da realidade, foram levantados dados na literatura para os parâmetros na simulação de cenários, do modelo adotado nesta abordagem do problema. Dentre eles, o coeficiente de difusão, a velocidade de transporte, o coeficiente de degradação e a entrada na fronteira. Entretanto, dado o caráter do modelo proposto, os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\tau_0$  e  $\tau_1$  foram estimados para a simulação dos cenários e teste do código numérico desenvolvido.

O código foi implementado em ambiente Matlab<sup>®</sup> para a simulação de cenários. Dentre as simulações obtidas, apresentamos a seguir dois cenários para as estações úmida e de seca, conforme indicadas, o parâmetro de difusão foi encontrado em [7] para as estações úmida e seca.

Tabela 1: Parâmetros do cenário 1 (úmida).

Parâmetro	Valor	Unidade
$\alpha_0$	0,015	$\text{km}^2\text{h}^{-1}$
$\alpha_1$	0,01	$\text{km}^3\text{h}^{-1}$
$\sigma$	0	$\text{h}^{-1}$
$\tau_0$	6,084	$\text{km h}^{-1}$
$\tau_1$	0,1	$\text{h}^{-1}$
$V_2$	1,2957	$\text{km h}^{-1}$
$Q$	2088	$\text{mol.km}^{-2}\text{h}^{-1}$

Tabela 2: Parâmetros do cenário 2 (seca).

Parâmetro	Valor	Unidade
$\alpha_0$	0,02	$\text{km}^2\text{h}^{-1}$
$\alpha_1$	0,01	$\text{km}^3\text{h}^{-1}$
$\sigma$	0	$\text{h}^{-1}$
$\tau_0$	8,568	$\text{km h}^{-1}$
$\tau_1$	0,1	$\text{h}^{-1}$
$V_2$	1,2957	$\text{km h}^{-1}$
$Q$	6264	$\text{mol.km}^{-2}\text{h}^{-1}$

### 4.1 Cenário 1 - estação úmida

No primeiro cenário a situação considerada foi para uma difusão sob a condição úmida e vento para esta estação, com uma concentração mínima de  $\text{CO}_2$ , cujos resultados são apresentados nas figuras 2(a) e 2(b). O número de Peclet [11] para este cenário foi 1,0366.

Os parâmetros utilizados nesta simulação se encontram na tabela 1, com os seguintes parâmetros de discretização  $\Delta x = 0,0037$ ,  $\Delta y = 0,02$  e  $\Delta t = 0,005$ .

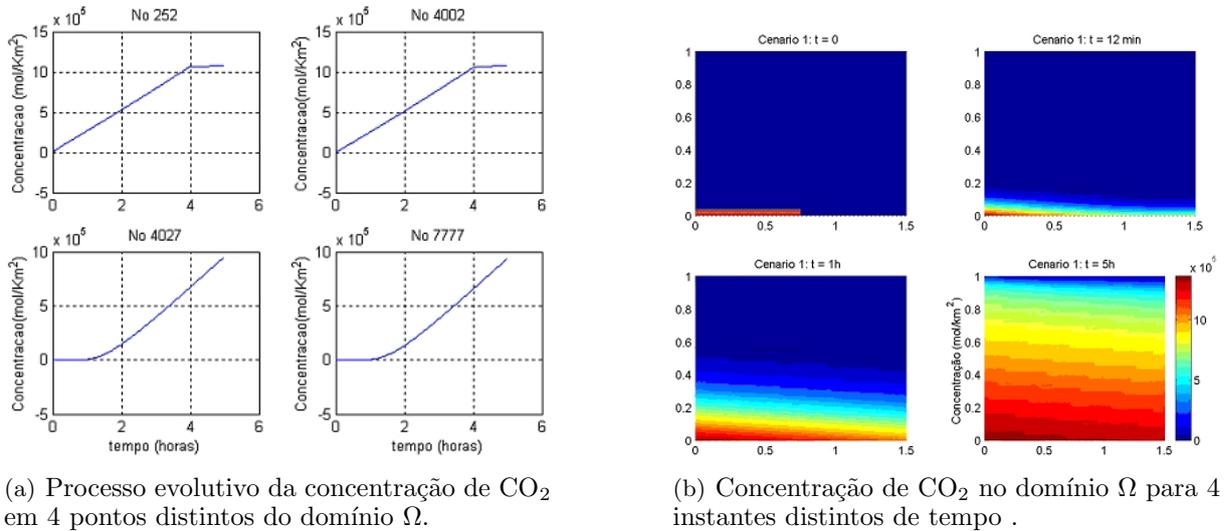


Figura 2: Simulação para o cenário 1 (estação úmida).

## 4.2 Cenário 2 - estação seca

No segundo cenário a situação considerada foi para uma difusão sob a condição seca e vento para esta estação, com uma concentração máxima de CO<sub>2</sub>. Os resultados são apresentados nas figuras 3(a) e 3(b). O número de Peclet [11] para este cenário foi 1,0366. Os parâmetros utilizados nesta simulação se encontram na tabela 2, com os mesmos parâmetros de discretização do cenário 1.

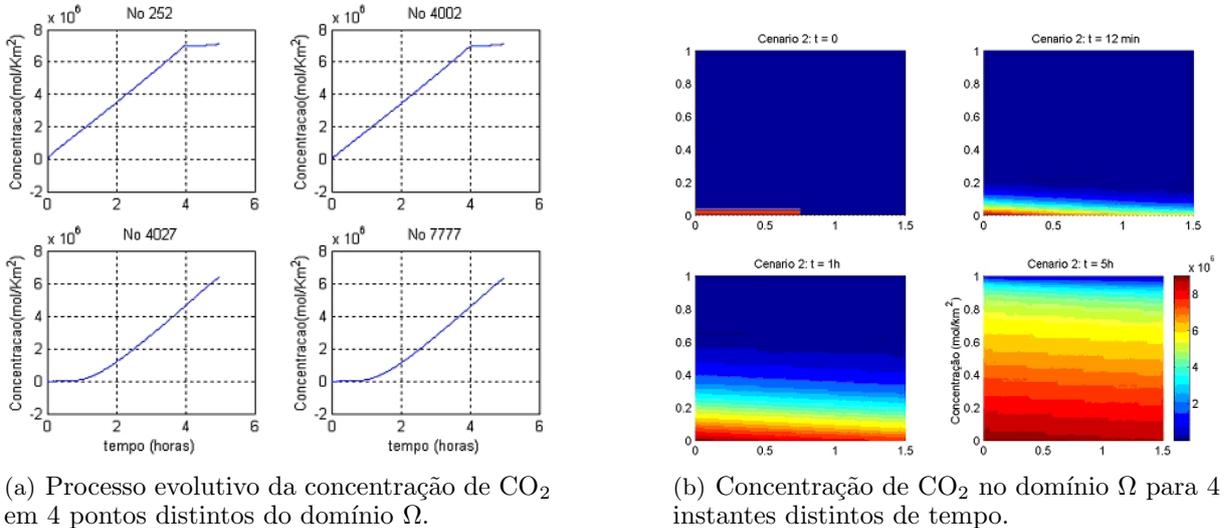


Figura 3: Simulação para o cenário 2 (estação seca).

## 5 Conclusões

Nos cenários desenvolvidos com a técnica de Galerkin, foram considerados ventos moderados para as estações seca e úmida, onde o efeito do transporte pelo vento é significativo. Com a concentração tendendo a deslocar-se para fora do domínio, predominando a dispersão horizontal. Isso leva a crer que a abordagem teórica proposta foi adequada.

Comparando as simulações dos dois cenários, na estação seca a concentração de CO<sub>2</sub> se apresentou cerca de 10 vezes ao que foi obtido para a estação úmida, o que de fato corresponde aos dados encontrados na literatura [12, 7].

O código numérico, em ambiente Matlab<sup>®</sup>, foi implementado com sucesso para a simulação dos cenários, que permitiu uma avaliação preliminar da dispersão de CO<sub>2</sub>, considerando o fluxo horizontal na região próxima a Sinop-MT.

## Referências

- [1] Bassanesi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. Ed. Harbra, São Paulo.
- [2] Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in biology*. Random-House, N. York.
- [3] EMBRAPA (2009). Brasil visto do espaço. Disponível em <http://www.embrapa.br>, acesso em 15/06/2009.
- [4] FAPEAM (2008). Amazônia pode estar absorvendo menos carbono do que se estimava. Manaus - 28 outubro 2008, Disponível em: [http://www.fapeam.am.gov.br/noticias/noticia\\_3439.html](http://www.fapeam.am.gov.br/noticias/noticia_3439.html). Acesso em: 1/nov/2008.
- [5] Ferreira, J. (2002). Modelação da dispersão de poluentes atmosféricos originários de fontes industriais em chipre. Projeto de Estágio na Universidade de Stuttgart (Alemanha), Abril-Setembro.
- [6] Ferreira F<sup>o</sup>, J. (2004). Análise de tempos de amostragem para cálculos de fluxos em sistemas de covariância de vórtices turbulentos, para floresta de transição do sudoeste da Amazônia. Dissertação de Mestrado, IF–UFMT, Cuiabá/MT.
- [7] Hashimoto, S. e Suzuki, M. (2002). Vertical distributions of carbon dioxide diffusion coefficients and production rates in forest soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 66:1151–1158.
- [8] Iório Jr., R. J. e Iório, V. (1988). *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Projeto Euclides. IMPA/CNPq.
- [9] Lions, J. L. (1961). *Equations Diferentielles Operationelles*. Springer, Berlim.
- [10] Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems*, volume 16 de *Studies in Mathematical and its Applications*. North-Holland, Amsterdam.
- [11] Meyer, J. F. C. A. e Diniz, G. L. (2007). Pollutant and diffusion in wetland systems: Mathematical modelling and numerical simulation. *Ecological Modelling*, 200:360–370.
- [12] Tannus, R. N. (2004). Funcionalidade e sazonalidade sobre cerrado e sobre ecótono floresta-cerrado: uma investigação com dados micrometeorológicos de energia e CO<sub>2</sub>. Dissertação de Mestrado, ESALQ–USP, Piracicaba/SP.
- [13] Valentini, C. M. A. (2004). Efluxo de CO<sub>2</sub> do solo de uma área de floresta de transição no noroeste de Mato Grosso. Dissertação de Mestrado, IF–UFMT, Cuiabá/MT.
- [14] Vilani, M. T. (2007). Estimativa da  $f_{APAR}$  utilizando três métodos para uma floresta de transição Amazônia-Cerrado. Dissertação de Mestrado, IF–UFMT, Cuiabá/MT.
- [15] Vourlitis, G. L., Priante F<sup>o</sup>, N., Hayashi, M. M., Nogueira, J. S., Caseiro, F., e Campelo Jr., J. H. (2002). Seasonal variations in evapotranspiration of a transitional tropical forest of Mato Grosso, Brazil. *Water Resources Research.*, 38:30–1–30–11.