

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise do condicionamento da matriz de Hilbert

Camila Elnatana Ramos dos Santos¹

Diego Zacarias Santos de Lima²

Pedro Vinícius Nascimento de Lima³

Matheus da Silva Menezes⁴

Ivan Mezzomo⁵

Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

Em sistemas lineares no formato $Ax = b$, pequenas variações que ocorrem nos elementos da matriz A podem causar uma grande variação na solução do sistema caso a matriz A seja malcondicionada [2]. Segundo [1], o malcondicionamento de uma matriz é devido a sua quase singularidade dos coeficientes, no entanto não é conveniente avaliar o malcondicionamento de uma matriz pelo valor do seu determinante. Para se medir o condicionamento de uma matriz é mais apropriado utilizar o número de condição.

Segundo [1], o número de condição é definido como o produto de duas normas, definida por:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \quad (1)$$

portanto quanto maior o número de condição, pior será o condicionamento da matriz A e mais sensível será a solução do sistema de equações lineares às perturbações na matriz de coeficientes.

Um caso especial de matriz que apresenta malcondicionamento, é a matriz de Hilbert. Segundo [1] a matriz de Hilbert é definida por:

$$H_n = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Exemplo de matriz de Hilbert com tamanho 5x5.

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Neste trabalho iremos avaliar o comportamento do número condição da matriz de Hilbert com a variação do tamanho da matriz. Para o cálculo do número de condição

¹camilaelnatana@outlook.com

²diego.z.s.de.lima@gmail.com

³pedro.vinicius102@hotmail.com

⁴matheus@ufersa.edu.br

⁵imezzomo@ufersa.edu.br

foram utilizados dois métodos, o primeiro utilizando a norma 2 e o segundo utilizando a norma ∞ .

Tabela 1: Variação do número de condição em função da ordem da matriz de Hilbert utilizando a norma 2.

Tamanho da matriz	Número de condição
2	19,28
3	524,06
4	$1,55 \times 10^4$
5	$4,77 \times 10^5$
6	$1,49 \times 10^7$
7	$4,75 \times 10^8$
8	$1,53 \times 10^{10}$
9	$4,93 \times 10^{11}$
10	$1,60 \times 10^{13}$

Tabela 2: Variação do número de condição em função da ordem da matriz de Hilbert utilizando a norma ∞ .

Tamanho da matriz	Número de condição
2	27
3	748
4	$2,84 \times 10^4$
5	$9,44 \times 10^5$
6	$2,91 \times 10^7$
7	$9,85 \times 10^8$
8	$3,39 \times 10^{10}$
9	$1,10 \times 10^{12}$
10	$3,53 \times 10^{13}$

Como podemos ver nas tabelas 1 e 2, o número de condição cresce conforme aumenta a ordem da matriz. Essa proporcionalidade pode ser observada até a matriz de Hilbert de ordem 10 conforme observado nos resultados da tabela 1 e 2. Portanto vemos que este tipo de matriz apresenta um maior malcondicionamento a medida que a ordem da matriz aumenta.

Referências

- [1] F. F. Campos Filho, *Algoritmos Numéricos*. 2 ed., LTC, Rio de Janeiro, 2010.
- [2] S. Leon, *Álgebra linear com aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 2008.