Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Influência do número de condição em matrizes de Vandermonde

Camila Elnatana Ramos dos Santos[1]
Diego Zacarias Santos de Lima[2]
Pedro Vinícius Nascimento de Lima[3]
Matheus da Silva Menezes[4]
Ivan Mezzomo[5]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

Este trabalho tem o objetivo de analisar como o resultado de uma interpolação polinomial, obtida utilizando a matriz de Vandermonde, é influenciado pelo condicionamento desta matriz. A interpolação surge do problema de, a partir de um conjunto de pontos, obter um polinômio que nos forneça uma previsão de outros pontos que não pertencem ao conjunto inicial de dados. Sejam n pontos-base $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, com $x_0 \neq x_1 \neq \cdots \neq x_{n-1}$, pertencentes a uma função $y = f(x)$, para que possamos obter uma aproximação do valor $f(z)$, com $z \in (x_0, x_n)$, fazemos $f(x) \approx p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, onde $p(x)$ é o polinômio interpolador de grau $n-1$. Se agora impormos que o polinômio interpolador passe pelos n pontos-base, então criamos um sistema da forma

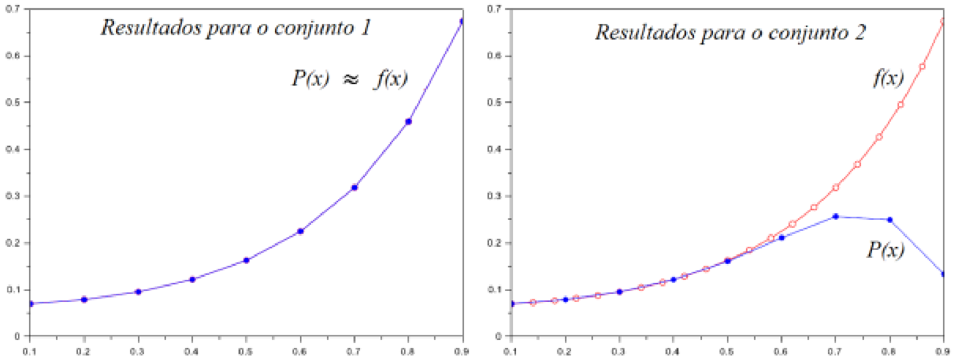
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes deste sistema é chamada matriz de Vandermonde. De acordo com [1], como o determinante desta matriz é diferente de zero, isto implica que o sistema possui solução única e, portanto, há apenas um polinômio de grau $n-1$ que passa pelos pontos-base. A utilização da interpolação via sistema linear é particularmente útil quando desejamos obter o polinômio interpolador em sua forma reduzida, uma vez que a solução do sistema é justamente os coeficientes a. Nesse sentido é de fundamental importância analisar o condicionamento da matriz de Vandermonde, que pode ser malcondicionada. Essa condição informa, de acordo com [1], sobre a sensibilidade de uma matriz, ou seja, o condicionamento analisa como pequenas variações nos elementos da matriz dos coeficientes A e/ou no vetor de termos independentes b influenciam a solução x do sistema linear

[1] camilaelnatana@outlook.com
[2] diego.z.s.de.lima@gmail.com
[3] pedro.vinicius102@hotmail.com
[4] matheus@ufersa.edu.br
[5] imezzomo@ufersa.edu.br

$Ax = b$. Esse condicionamento se verifica através do número de condição. Quanto maior for este número, mais malcondicionada é uma matriz e podemos esperar um resultado não tão satisfatório para o sistema. Segundo [1] este número de condição é obtido pelo produto de duas normas: $cond(A) = k(A) = ||A||||A^{-1}||$. Analisando esta equação, fica evidente que o número de condição da matriz depende da norma utilizada. A norma que iremos utilizar será o maior valor singular da matriz. Iremos realizar a interpolação polinomial, utilizando a matriz de Vandermonde, para dois distintos conjuntos de pontos. O objetivo será analisar graficamente como o número de condição pode ter influenciado na solução para o polinômio interpolador. A função que será interpolada é dada por $y = f(x) = \dfrac{sinh5x}{xsinh5}$. A interpolação será feita para dois conjuntos de pontos. O primeiro conjunto possui os pontos igualmente espaçados entre 0,1 e 0,9 com espaçamento de 0,1. O segundo conjunto, por sua vez, possui os pontos igualmente espaçados entre 0,1 e 0,9 com espaçamento de 0,04. Os resultados da interpolação polinomial obtida para cada conjunto são mostrados na Figura abaixo.

Figura 1: Resultados da interpolação para os dois conjuntos de pontos.



A interpolação dos pontos do conjunto 1 forneceu uma boa aproximação da função $f(x) = \dfrac{sinh5x}{xsinh5}$. O mesmo não ocorreu para o conjunto 2. O número de condição da matriz de Vandermonde gerada pelo conjunto 1 é $1,123 \times 10^7$. Em contrapartida, o número de condição para o conjunto 2 é $8,893 \times 10^{18}$, significativamente maior que o primeiro. A matriz de Vandermonde é, em geral, malcondicionada. Apesar do alto número de condição da matriz gerada pelo conjunto 1, o resultado ainda foi satisfatório. No caso do conjunto 2, por possuir mais pontos, a matriz gerada tornou-se ainda mais malcondicionada, o que influenciou significativamente no resultado obtido, gerando, como podemos analisar na Figura 01, uma interpolação distante dos pontos da função original.

Referências

[1] F. F. Campos Filho, *Algorítmos Numéricos.* 2 ed., LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[2] S. Leon, *Álgebra linear com aplicações.* LTC, Rio de Janeiro, 2008.