Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Investigando emparelhamento perfeito em produto cartesiano de grafos

Camila S. Crispim[1]
Instituto de Matemática e Estatística, UFF, Niterói, RJ
Cybele T. M. Vinagre[2]
Instituto de Matemática e Estatística, UFF, Niterói, RJ

Sejam $G_1 = G_1(V_1, E_1)$ e $G_2 = G_2(V_2, E_2)$ dois grafos, onde V_i indica o conjunto de vértices e E_i, o conjunto de arestas de G_i, $i = 1, 2$. O *produto cartesiano* de G_1 por G_2, denotado $G_1 \Box G_2$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, no qual o vértice (u_1, v_1) é adjacente ao vértice (u_2, v_2) quando u_1 é adjacente a u_2 em G_1 e $v_1 = v_2$ ou $u_1 = u_2$ e v_1 é adjacente a v_2 em G_2 (para mais detalhes sobre esta operação em grafos, veja-se [3]). Um *emparelhamento* em um grafo G é um subconjunto M do conjunto de arestas de G tal que nenhum par de elementos de M possui extremidade em comum. Diz-se que M *satura um vértice* v de G quando algum elemento de M incide em v. Um *emparelhamento máximo* em G é aquele que satura o maior número possível de vértices do grafo. O *número de emparelhamento* de G, $\mu(G)$, é a cardinalidade de um emparelhamento máximo. Diz-se que M é um *emparelhamento perfeito* quando M satura todos os vértices de G. Todo emparelhamento perfeito é um emparelhamento máximo e se um grafo com n vértices admite emparelhamento perfeito M então n é par e M tem cardinalidade $\frac{n}{2}$. Quando um grafo G admite emparelhamento perfeito diz-se que G é *emparelhável*. Para estes e outros conceitos relacionados a emparelhamentos em grafos, veja-se [2].

É conhecido da literatura que o produto cartesiano de dois grafos com emparelhamento perfeito possui emparelhamento perfeito (ver [3] e referências ali contidas). Em sua tese de doutorado [1], A. Almeida exibe um grafo G sem emparelhamento perfeito tal que $G^2 = G \Box G$ é emparelhável, resolvendo uma questão em aberto. A mesma autora levanta a questão: que propriedades do grafo G produzem este efeito? Ou seja, como caracterizar grafos sem emparelhamento perfeito cujo quadrado (via produto cartesiano) possui um emparelhamento perfeito?

Com o objetivo de iniciar a investigação das questões acima colocadas, foram realizadas análises de propriedades de grafos e buscas computacionais na procura por exemplos de grafos sem emparelhamento perfeito, cujos quadrados pelo produto cartesiano possuíssem emparelhamento perfeito, que fossem diferentes daquele apresentado em [1]. Como resultado destas buscas, três famílias infinitas de tais grafos foram identificadas, todas formadas por árvores com $n = 2k$ vértices, $k \geq 3$, e número de emparelhamento $\mu = k - 1$ (logo,

[1]camilacrispim@id.uff.br
[2]cybl@vm.uff.br

necessariamente diferente de $\frac{n}{2}$). A Figura 1 ilustra um grafo genérico de uma das famílias: é uma árvore do tipo "dupla vassoura equilibrada", constituída de dois vértices pendentes em cada extremidade de um caminho com $2k - 4$ vértices.

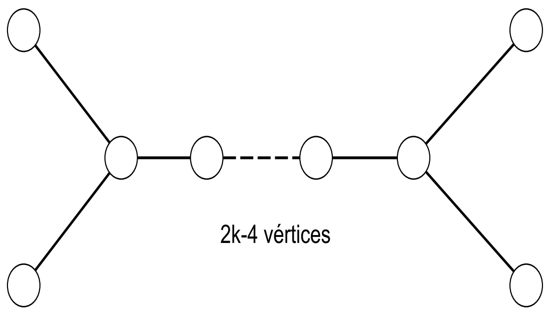

Figura 1: Descrição de grafo de uma das famílias encontradas.

Na sequência, foi elaborada uma estratégia para descrever um emparelhamento perfeito em G^2 para um grafo arbitrário G de cada uma destas famílias, ou seja, obteve-se uma maneira de selecionar $\frac{n^2}{2}$ arestas independentes em G^2, saturando assim todos os seus vértices.

Para a continuação do trabalho, pretende-se obter outras famílias de grafos com as propriedades acima mencionadas e, também, investigar uma maneira de garantir a existência de emparelhamento perfeito em seus elementos usando propriedades de matrizes que se associam a grafos.

Agradecimentos

A primeira autora agradece à FAPERJ (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) pelo apoio através de bolsa de Iniciação Científica.

Referências

[1] A. R. Almeida, Propriedades do produto cartesiano de grafos, Tese de Doutorado em Ciência da Computação, UFF.(2015).

[2] J.A. Bondy, and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications* MacMillan, London, 1976.

[3] R. Hammack, W. Imrich, and S. Klavžar. Product of graphs: Structure and Recognition. 2nd edition. *Wiley-Intersciense Series in Discrete Mathematics and Optimization*, vol. 56, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2011.

